1 Integration

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ziel: Fläche unter dem Graphen berechnen.

1.1 Riemannintegral

Definition 1.1 (Zerlegungen)**.** Eine endliche Zerlegung Z von einem (beschränkten) Intervall $[a,b]$ ist eine endliche Folge $z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. x_k heißen Teilungs- oder Stützpunkte. Die Intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ heißen Teilintervalle. $h := \max_{k=1\dots n} |x_k - x_{k-1}|$ heißt Feinheit der Zerlegung.

Eine Zerlegung mit $|x_k - x_{k-1}| = h\ \forall k$ heißt äquidistant.

$Z(a,b) =$ Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$

Definition 1.2 (Ober- und Untersumme)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R}$, s.d. $|f(x)| \leq M\ \forall x \in [a,b]$.

Die Riemannsche Ober- / Untersummen sind

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

bzw.

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Bemerkung 1.3. Eine Verfeinerung der Zerlegung Z ist eine Zerlegung $Z'' = (x''_0, \dots, x''_{n''}$ s.d. $(x_0, \dots, x_n) \subset (x''_0, \dots, x''_{n''})$ und $h'' \leq h$. Zu Zerlegungen $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (x'_0, \dots, x'_{n'})$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung Z''

$$\begin{aligned}(x_0, \dots, x_n) &\subset (x''_0, \dots, x''_{n''})\\ (x'_0, \dots, x'_{n'}) &\subset (x''_0, \dots, x''_{n''})\end{aligned}$$
$$.$$

und $h'' \leq \min\{h, h'\}$

Bemerkung 1.4. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen und Z_1 feiner als Z_2 ist, dann gilt

$\inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \cdot (b-a) \leq \underline{S}_{Z_2}(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \leq \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \cdot (b-a).$

Definition 1.5 (Ober-/Unterintegral)**.** Das Ober- / Unterintegral von f sind definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{S}_Z(f) \mid z \in Z(a,b)\}.$$

bzw.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}_Z(f) \mid z \in Z(a,b)\}.$$

Lemma 1.6. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ex. für f das Ober- und Unterintegral und für jede Folge von Zerlegungen $z_n \in Z(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{z_n} = \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} dx = \lim_{n\to\infty} f(x)\overline{S}_{z_n}.$$

Beweis. Rannacher. □

Definition 1.7 (Riemann-Integral)**.** Sind Ober- und Unterintegral für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann-Integral für f über $I = [a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar.

Satz 1.8 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $I = [a,b]$ integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ Zerlegung $z \in Z(a,b)$, s.d. $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \epsilon$.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.9 (Riemann-Summen)**.** Sei $z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $i = 1 \dots n$.

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

heißt eine Riemann-Summe von f.

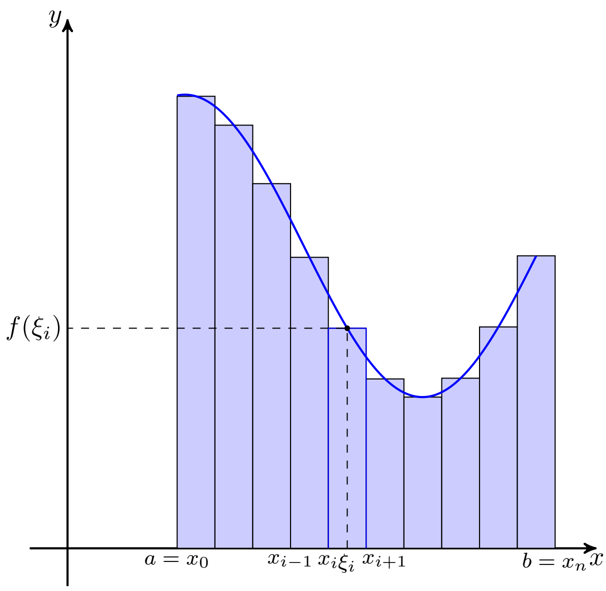

Abbildung 1: Riemannsche Summen

Satz 1.10. Eine beschränkte Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar wenn $\forall$ Folgen $z_n \in Z(a,b)$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ alle zugehörigen R.-Summen zu dem selben Limes konvergieren.

$$RS_{z_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. „ $\Longrightarrow$ ": Sei f R.-integrierbar. Sei $z \in Z(a,b)$ mit Feinheit h. Dann

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underbrace{RS_Z(f)}_{\forall \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)} \leq \overline{S}_Z(f).$$

Aus der Konvergenz $|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \to 0$, $n \to \infty \overset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} RS_z \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$.

„ $\Longleftarrow$ " Seien alle R.-Summen konvergent gegen denselben Limes. Sei $z \in \mathcal{Z}(a,b)$, $\epsilon > 0$ beliebig.

Offenbar $\exists$ R.-S. $\underline{RS}_Z(f)$, $\overline{RS}_Z(f)$ s.d. $\underline{RS}_Z(f) - \epsilon \leq \underline{S}_Z(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \leq \overline{RS}_Z(f) + \epsilon$.

Dann

$$\underbrace{\underline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h\to 0} \int_a^b f(x)dx} -\epsilon \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \underbrace{\overline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h\to 0} \int_a^b f(x)dx} +\epsilon.$$

Wegen ϵ beliebig folgt:

$$\left|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

□

Satz 1.11. Eine stetige Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. $I = [a,b]$ kompakt $\implies$ f auch gleichmäßig stetig $\implies$ $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$, s.d. $\forall x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta_\epsilon$ gilt $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit $h < \delta_\epsilon$, dann

$$\begin{aligned}|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|\sup_{x\in I_k} f(x) - \inf_{x\in I_k} f(x)\right|}_{<\epsilon} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &< \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b-a).\end{aligned}$$

$\implies |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \to 0$, $h \to 0$
$\implies$ f Riemann-integrierbar. □

Satz 1.12. Eine beschränkte monotone Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $x \in I$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit h.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq h \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = h(f(b) - f(a)).$$

Sei $\epsilon > 0$, dann wähle $h_\epsilon := \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ ($f(b) \neq f(a)$, sonst trivial). Dann gilt für $h < h_\epsilon$

$$\left|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| < \epsilon.$$

□

Beispiel 1.13. Nicht alle beschränkte Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ sind R.-integrierbar, z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$I = [0,1]$. $\underline{S}_Z(f) = 0 \neq 1 = \overline{S}_Z(f)$.

1.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 1.14 (Additivität)**.**

1. Eine (beschr.) R.-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch über jedem Teilintervall $[a', b'] \subset [a,b]$ R.-integrierbar. Insb. gilt für $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (*).$$

2. Ist eine (beschr.) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für ein $c \in (a,b)$ über $[a,c]$ und $[c,b]$ R.-integrierbar, dann ist f über $[a,b]$ integrierbar und es gilt $(*)$.

Beweis. ohne Beweis. □

Korrolar 1.15. Eine beschränkte Funktion $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$, welche bezüglich einer Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von I stückweise stetig ist oder stückweise monoton ist, ist über I Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$