Algebra 2 Blatt 3 Christian Merten

A1 $(A, \mathfrak{m})$ lok. Ring, M, N e.e. Moduln

(a) Sei $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$ Zz: $M = 0$.

<u>Bew.</u> Es ist $M \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong M/\mathfrak{m}M$. Es ist $M/\mathfrak{m}M = 0 \iff \mathfrak{m}M = M \overset{\text{Nakayama}}{\iff} M = 0$

(b) Sei $M \otimes_A N = 0$. Zz: $M = 0$ oder $N = 0$.

<u>Bew.</u> Es ist $0 = \underbrace{(M \otimes_A N)}_{=0} \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong M \otimes_A (N \otimes_A A/\mathfrak{m})$

$$\overset{3.14}{\cong} (M \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N \otimes_A A/\mathfrak{m}) \qquad (*)$$

Da $M, N, A/\mathfrak{m}$ e.e. sind $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$ und $N \otimes_A A/\mathfrak{m}$ e.e. $A/\mathfrak{m}$-Moduln. (*)

Insbes. e.d. VR, d.h. es ex. $n, k \in \mathbb{N}_0$ s.d. $M \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong (A/\mathfrak{m})^n$ und $N \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong (A/\mathfrak{m})^k$. Also folgt

$$0 \overset{(*)}{=} (M \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N \otimes_A A/\mathfrak{m}) \cong (A/\mathfrak{m})^n \otimes_{A/\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{m})^k \cong (A/\mathfrak{m})^{nk}$$

Daraus folgt $nk = 0$, also $n = 0$ oder $k = 0$. Also $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$ oder $N \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$. Damit folgt die Beh. mit (a). $\square$

Anm. (*). Zunächst ist $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$ e.e. A-Modul mit ES $(m_i \otimes \overline{1})_{i=1}^n$ wobei $(m_i)_{i=1}^n$ ES von M. Nun ist $(m_i \otimes \overline{1})_{i=1}^n$ auch ES von $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$ als $A/\mathfrak{m}$-Modul, denn für $x = \sum_{i=1}^n a_i (m_i \otimes \overline{1}) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \overline{a_i} \in M \otimes_A A/\mathfrak{m}$ ist:

$$x = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \overline{a_i} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} (m_i \otimes \overline{1}).$$

A2| R Ring. Zz: $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ (1) exakt

$\iff \forall$ R-Moduln M:

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{u_*} \operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{v_*} \operatorname{Hom}_R(M,N'') \qquad (2)$$

exakt

Bew. Sei (1) exakt und M R-Modul. • Sei $f \in \operatorname{Hom}_R(M,N')$ mit $u_*(f)=0$. Dann ist $u \circ f = 0$.

Da $\ker u = 0$ folgt $\operatorname{im} f = 0$ also $f = 0$, also u_* injektiv.

• Sei nun $f \in \operatorname{im} u_*$. Dann $\exists g \in \operatorname{Hom}_R(M,N')$: $u_*(g) = u \circ g = f$.

Dann gilt $v_*(f) = v \circ f = v \circ u \circ g$. Da $\operatorname{im} u = \ker v$ folgt $v_*(f) = 0$ also $f \in \ker(v_*)$.

Also $\operatorname{im} u_* \subseteq \ker v_*$.

• Sei nun $f \in \ker v_*$. Dann ist $v \circ f = 0$, also $\operatorname{im} f \subseteq \ker v$.

Da $\ker u = \{0\}$ ist $N' \cong N'/\ker u \cong \operatorname{im} u = \ker v$, so

erhalten wir das nebenstehende komm. Diagramm mit

$g: M \longrightarrow N'$ und $u \circ g = f$ also $f \in \operatorname{im} u_*$

Insgesamt folgt $\operatorname{im} u_* = \ker v_*$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \overset{\operatorname{im} u}{\overset{\shortparallel}{\ker v}} \arrow[r, hook] & N \\
& N'/\ker u \arrow[ur, "\sim"] & & \\
& N' \arrow[u, "s"] \arrow[uur, "u"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sei nun (2) exakt $\forall$ R-Moduln M.

• Zz: u injektiv. Setze $M := \ker u$ und $\iota: \ker u \hookrightarrow N'$ die kanon. Inklusion.

Dann ist $u_*(\iota) = u \circ \iota = 0$. Da u_* injektiv folgt $\iota = 0$, also $\ker u = 0$.

$\Rightarrow u$ injektiv.

• Setze $M = N'$. Dann ist $\mathrm{id}_{N'} \in \operatorname{Hom}_R(N',N')$. Da $\operatorname{im} u_* \subseteq \ker v_*$ gilt $v_* \circ u_* = 0$, also

$$0 = 0_*(\mathrm{id}_{N'}) = v_* \circ u_*(\mathrm{id}_{N'}) = (v \circ u)_*(\mathrm{id}_{N'})$$

also ist $0 = v \circ u \circ \mathrm{id} = v \circ u$ also $\operatorname{im} u \subseteq \ker v$.

• Setze $M := \ker v$ und $\iota: \ker v \hookrightarrow N$ die kanon. Inklusion. Dann ist

$v^*(\iota) = v \circ \iota = 0$. Da $\ker v^* = \operatorname{im} u^*$ folgt $\exists \varphi: \ker v \longrightarrow N'$ mit $u \circ \varphi = \iota$.

Also $\ker v = \operatorname{im} \iota = \operatorname{im}(u \circ \varphi) \subseteq \operatorname{im} u$.

$\square$

A3) R Ring

(a) Beh: $\ker\varphi' \xrightarrow{\alpha'} \ker\varphi \xrightarrow{\alpha} \ker\varphi''$ exakt.

Bew: · Die Folge ist wohldef., da $\beta'\circ\varphi' = \varphi\circ\alpha'$, d.h. für $m' \in \ker\varphi'$ ist $(\varphi\circ\alpha')(m') = (\beta'\circ\varphi')(m') = 0$, also $\alpha'(m') \in \ker\varphi$. Analog für $\ker\varphi \xrightarrow{\alpha} \ker\varphi''$.

· Es gilt außerdem für $m' \in \ker\varphi' \subseteq M'$, dass $(\alpha\circ\alpha')(m') = 0$ da $\operatorname{im}\alpha' = \ker\alpha$, also $\operatorname{im}\alpha'|_{\ker\varphi'} \subseteq \ker\alpha|_{\ker\varphi}$.

· Diagrammjagd:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\varphi' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & \ker\varphi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \ker\varphi'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

$m' \in M'$, m, $n' \mapsto 0$

$N' \ni n' = 0$ da β' injektiv

$\Rightarrow m' \in \ker\varphi'$

$\Rightarrow \ker\alpha|_{\ker\varphi} \subseteq \operatorname{im}\alpha'|_{\ker\varphi'}$

b) Setze $\bar\beta' : \operatorname{coker}\varphi' \to \operatorname{coker}\varphi$, $n' + \operatorname{im}\varphi' \mapsto \beta'(n) + \operatorname{im}\varphi$

$\bar\beta'$ wohldef., denn für $n', \tilde n'$ mit $n' - \tilde n' \in \operatorname{im}\varphi'$ gilt $\beta'(n') - \beta'(\tilde n') \in \operatorname{im}\varphi$, denn

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

$m' \mapsto m$

$n' \mapsto n$

$\tilde n' \mapsto \tilde n$

$\operatorname{im}\varphi \ni n' - \tilde n' \mapsto n - \tilde n$ also $n - \tilde n \in \operatorname{im}\varphi$

Analog für $\operatorname{coker}\varphi \xrightarrow{\bar\beta} \operatorname{coker}\varphi''$.

Nun zur exaktheit: Sei $n+\mathrm{im}\,\varphi \in \mathrm{im}\,\overline{\beta}'$. Dann ex ein $n'\in N'$:
$\beta'(n')=n$. Insbes. ist $\beta(\beta'(n'))=0$ da $\mathrm{im}\,\beta'=\ker\beta$. Also insbes.
$\overline{\beta}(n+\mathrm{im}\,\varphi)=0$, also $n+\mathrm{im}\,\varphi\in\ker\overline{\beta}$.

Zz. $\ker\overline{\beta}\subseteq\mathrm{im}\,\overline{\beta}'$. Sei $n+\mathrm{im}\,\varphi\in\ker\overline{\beta}$:

α surj.

$$\begin{tikzcd}
 & & m \arrow[r, mapsto] & m'' & \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' & \\
 & & \tilde{n} \arrow[r, mapsto] & & \\
 & & \hat{n} \arrow[r, mapsto] & n''\in\mathrm{im}\,\varphi'' & \\
 & n' \arrow[r, mapsto] & n-\tilde{n} \arrow[r, mapsto] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{im}\,\beta'=\ker\beta$

Dann ist $\beta'(n')=n-\tilde{n}$ und $\tilde{n}\in\mathrm{im}\,\varphi \Rightarrow \overline{\beta}'(n'+\mathrm{im}\,\varphi')=n-\tilde{n}+\mathrm{im}\,\varphi=n+\mathrm{im}\,\varphi$.
$\Rightarrow n+\mathrm{im}\,\varphi\in\mathrm{im}\,\overline{\beta}'$

c) Zz. $\ker\varphi\xrightarrow{\alpha}\ker\varphi''\xrightarrow{\delta}\mathrm{coker}\,\varphi'$ exakt.

Sei $m''\in\mathrm{im}\,\alpha|_{\ker\varphi}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & m \arrow[r, mapsto] & m'' & \\
 & \ker\varphi' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & \ker\varphi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \ker\varphi'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' & \\
 & n' \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Da β' injektiv $\Rightarrow n'=0 \Rightarrow \delta(m'')=n'+\mathrm{im}\,\varphi'=0 \Rightarrow m''\in\ker\delta$.

Sei $m'' \in \ker \delta$.

da $\alpha : M \to M''$ surj.

$$\begin{tikzcd}
 & m \in M \arrow[r, mapsto] & m'' & \\
m' \arrow[ur, mapsto] & & & \\
\ker \varphi' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & \ker \varphi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \ker \varphi'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' \\
 & n' \arrow[r, mapsto] & n = 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

$\delta(m'') = n' + \operatorname{im} \varphi' = 0$

$\Rightarrow n' \in \operatorname{im} \varphi'$

also $m \in \ker \varphi \Rightarrow m'' \in \operatorname{im} \alpha|_{\ker \varphi}$.

Insgesamt folgt die Exaktheit von $\ker \varphi \xrightarrow{\alpha} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi'$

• Zz. $\ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \xrightarrow{\bar{\beta}'} \operatorname{coker} \varphi$ exakt.

Sei $n' + \operatorname{im} \varphi' \in \operatorname{im} \delta$.

$$\begin{tikzcd}
 & m \in M \arrow[r, mapsto] & m'' & \\
\ker \varphi' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & \ker \varphi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \ker \varphi'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' \\
 & n' \arrow[r, mapsto] & n \in \operatorname{im} \varphi \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

$\delta(m'') = n' + \operatorname{im} \varphi'$

$\Rightarrow \beta'(n') = n \in \operatorname{im} \varphi$

$\Rightarrow \bar{\beta}'(n' + \operatorname{im} \varphi') = n + \operatorname{im} \varphi = 0$

$\Rightarrow n' + \operatorname{im} \varphi' \in \ker \bar{\beta}'$

Sei nun $n' + \operatorname{im}\varphi' \in \ker \bar{\beta}'$.

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & m \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & m'' \in \ker\varphi'' \arrow[d, mapsto] \\
n' \arrow[r, mapsto] & n \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

$n \in \operatorname{im}\varphi$, $\quad \operatorname{im}\beta' = \ker\beta$

Nach Definition von δ ist also $\delta(m'') = n' + \operatorname{im}\varphi'$.

$\Rightarrow n' + \operatorname{im}\varphi' \in \operatorname{im}\delta$.

A4 | (a) A komm. Ring zz: $A[T]$ treuflache A-Algebra.

Bew: Falls $A=0$ dann ist jeder A Modul $M=0$ und damit jede Folge von A-Moduln exakt. Sei nun $A\neq 0$.

Es ist $A^{\mathbb{N}_0} \cong A[T]$ als A-Moduln. Da $A\neq 0$ freier A-Modul ist $A^{(\mathbb{N}_0)}\neq 0$ freier A-Modul und insb. treuflach.

$A[T]$ wird via $A \overset{kan.}{\hookrightarrow} A[T]$ zur A-Algebra. $\square$

(b) Beh: $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Algebra flach, aber nicht treuflach.

Bew: Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln.

zz: $M'\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{f\otimes id_{\mathbb{Q}}} M\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{g\otimes id_{\mathbb{Q}}} M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ exakt.

- Sei $x=\sum_{endl} m_i'\otimes q_i \; M'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Dann ist
$$(g\otimes id_{\mathbb{Q}})(f\otimes id_{\mathbb{Q}}(x)) = (g\otimes id_{\mathbb{Q}})\Big(\sum_{endl} f(m_i')\otimes q_i\Big) = \sum_{endl} \underbrace{g(f(m_i'))}_{=0}\otimes q_i = 0$$

- Sei nun $x=\sum_{endl} m_i\otimes q_i \in \ker(g\otimes id_{\mathbb{Q}})$ mit $q_i=\frac{p_i}{s_i}$ mit $(p_i,s_i)=1$, $p_i,s_i\in\mathbb{Z}$, $s_i\neq 0$

Dann ist $x=\sum_{endl} m_i\otimes q_i = \sum_{endl} m_i\otimes \frac{p_i}{s_i} = \sum_{endl} m_i\otimes\Big(\frac{p_i}{s_i}\underbrace{\frac{\prod_{i\neq j} s_j}{\prod_{i\neq j} s_j}}_{=1}\Big)$

$$\overset{M\ \mathbb{Z}\text{-Mod.}}{=} \sum_{endl} m_i p_i \prod_{i\neq j} s_j \otimes \frac{1}{\prod_i s_i}$$
$$= \underbrace{\Big(\sum_{endl} \underbrace{m_i p_i \prod_{i\neq j} s_j}_{=:\tilde m_i}\Big)}_{=:\tilde m} \otimes \frac{1}{\underbrace{\prod_i s_i}_{=:s}}$$
$$= \tilde m\otimes \frac{1}{s}$$

Also folgt $0=(g\otimes id_{\mathbb{Q}})(x) = g(\tilde m)\otimes\frac{1}{s}$. Nach LA II ist $M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong Q(M'')$ via $y\otimes\frac{a}{b}\longmapsto \frac{ay}{b}$. D.h. $\frac{g(\tilde m)}{s}=0\in Q(M'')$, also

$\exists r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}: rg(\tilde m)=0\in M''$. Insbes. $rg(\tilde m)=0\in Q(M'')$. Da $Q(M'')\cong M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ und $M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$-VR insbes. frei, insbes. torsionsfrei

$\Rightarrow g(\tilde m)=0\in M''\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \tilde m\in\ker g=\operatorname{im} f$, also ex. ein $m'\in M'$ sd. $f(m')=\tilde m$.

Dann folgt $(f \otimes id_{\mathbb{Q}})(m' \otimes \frac{1}{s}) = f(m') \otimes \frac{1}{s} = \tilde{m} \otimes \frac{1}{s} = x$.

Also $x \in \operatorname{im}(f \otimes id_{\mathbb{Q}})$.

Insgesamt folgt $\mathbb{Q}$ flach als $\mathbb{Z}$-Modul.

Zz: $\mathbb{Q}$ nicht treuflach. Es ist $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{F}_2$, d.h. $2\mathbb{Z}$ max. Ideal in $\mathbb{Z}$. Nun ist $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-Algebra via $\iota : \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\text{kan.}} \mathbb{Q}$, d.h. $(2\mathbb{Z})^e = \mathbb{Q}\,\iota(2\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}(2\mathbb{Z}) = \mathbb{Q} = (1)$.

Da $\mathbb{Q}$ flache $\mathbb{Z}$-Alg. ist $\mathbb{Q}$ nicht treuflach. $\square$

A5 (a) $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal. Zz: $I(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.

Bew: Es gilt nach Def.

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ Primideal} \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \overset{1.24}{=} r(\mathfrak{a})$$

(b) $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$. Beh: $V(I(Y)) = \overline{Y} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$.

Bew: $V(I(Y))$ ist nach Def. abgeschl. Es ist außerdem für $\mathfrak{p} \in Y$: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\tilde{\mathfrak{p}} \in Y} \tilde{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{p} \in V(I(Y))$, also $Y \subseteq V(I(Y))$.

Sei nun $Z \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ mit Z abgeschl. und $Y \subseteq Z$, d.h. $Z = V(M)$ wobei $M \subseteq A$. und $\forall \mathfrak{p} \in Y$: $\mathfrak{p} \supseteq M$. Zz: $V(I(Y)) \subseteq Z = V(M)$. Dazu sei $\mathfrak{p} \in V(I(Y))$. Also $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\tilde{\mathfrak{p}} \in Y} \tilde{\mathfrak{p}} \supseteq M$. Damit folgt $\mathfrak{p} \in V(M) = Z$. $\square$

(c) Bew: • Wohldefiniert, da $V(M) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschl. für $M \subseteq A$ und für $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschl. ist $Y = V(M)$ für ein $M \subseteq A$. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ das von M erz. Ideal in A, dann ist nach Blatt 2 $Y = V(M) = V(\mathfrak{a})$ also $I(Y) = r(\mathfrak{a})$ Radikalideal nach (a).

• Bijektivität: Sei $\mathfrak{a} \subset A$ mit $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. Dann ist $I(V(\mathfrak{a})) \overset{(a)}{=} r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Sei nun $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschl. Dann ist $V(I(Y)) \overset{(b)}{=} \overline{Y} \overset{Y \text{ abgeschl.!}}{=} Y$.

• Seien nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Radikalideale mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Dann ist $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$, denn für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ ist $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Seien nun $Y, Z \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschl. mit $Y \subseteq Z$, dann ist $I(Z) \subseteq I(Y)$, denn für $x \in I(Z) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$ $\forall \mathfrak{p} \in Z$. Da $Y \subseteq Z$ also $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} = I(Y)$ $\square$