Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Lemma 0.1. Es gilt
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \pi.$$

Beweis. Betrachte $f_n := \frac{1}{1+y^2}\chi_{[-n,n]}$. Da $\frac{1}{1+y^2} \ge 0$ folgt $f_n \nearrow \frac{1}{1+y^2}$. Außerdem ist f_n stetig und daher messbar, insbesondere Riemann-integrierbar und dieses stimmt auf dem kompakten Intervall $[-n,n]$ mit dem Lebesgue-Integral überein. Weiter ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = 1+\tan^2(x)$. Also folgt mit monotoner Konvergenz und dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{z=\tan(y)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\arctan(-n)}^{\arctan(n)} \frac{1+\tan^2(z)}{1+\tan^2(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\arctan(n)-\arctan(-n)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\arctan(n) - \lim_{n\to\infty}\arctan(-n) \\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

□

Lemma 0.2. Für $f,g\colon X \to [0,\infty)$ gilt
$$\sup_{x\in X} fg \le \sup_{x\in X} f \cdot \sup_{x\in X} g.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in X}|fg| &= \sup\{f(x)g(x) \mid x\in X\} \\
&\le \sup\{f(x)g(y) \mid x,y\in X\} \\
&\overset{f,g\ge 0}{=} \sup\{f(x)\mid x\in X\}\cdot\sup\{g(x)\mid x\in X\} \\
&= \sup_{x\in X} f \cdot \sup_{x\in X} g.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1. a) Seien $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $a,b\in\mathbb{C}$. Dann ist $af+bg\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Weiter seien $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial_\beta(af+bg)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|ax^\alpha\partial_\beta f + bx^\alpha\partial_\beta g| \\
&\le |a|\underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial_\beta f|}_{<\infty} + |b|\underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial_\beta g|}_{<\infty} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

b) Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $p \in [1, \infty]$. Falls $p = \infty$, dann gilt

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f| < \infty.$$

Es genügt die Aussage für $p = 1$ zu zeigen, denn wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $p > 1$, dann folgt direkt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p-1}|f| \,\mathrm{d}x \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f|^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}x \\
&\overset{0.2}{\le} \underbrace{\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f|\Big)}_{<\infty}^{p-1} \underbrace{\|f\|_{L^1}}_{<\infty} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Setze nun $S := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) f\right|$. Es ist $\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) = \sum_{\alpha\le 1} x^\alpha$. Dabei bezeichne $\alpha \le 1 \iff \alpha_i \le 1 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
S &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) f\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\sum_{\alpha\le 1} x^\alpha f\right| \\
&\le \sum_{\alpha\le 1} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha f|}_{<\infty} \\
&< \infty. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Es ist außerdem $\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) \ge 0$ und messbar, also Fubini anwendbar. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) |f| \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2)} \,\mathrm{d}x \\
&\le S \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2)} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} S \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x_i^2} \,\mathrm{d}x_i \\
&\overset{0.1}{=} S\pi^n \\
&\overset{(1)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Also $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

c) Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann sind $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und mit Produktregel auch $fg \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ex. nach Produktregel ein $N \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu_i, \mu_i \in \mathbb{N}_0^n$, s.d.

$$|\partial_\beta (fg)| = \sum_{k=1}^N \lambda_i (\partial_{\nu_i} f)(\partial_{\mu_i} g).$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta (fg)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i (\partial_{\nu_i} f)\,(\partial_{\mu_i} g)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^N \lambda_i \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial_{\nu_i} f)(\partial_{\mu_i} g)| \\
&\overset{0.2}{\le} \sum_{i=1}^N \lambda_i \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_{\nu_i} f|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{\mu_i} g|}_{<\infty} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Lemma 0.3. Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}(\xi) = i\xi\widehat{f}.$$

Beweis. Zunächst sei $\xi \in \mathbb{R}$. Dann betrachte

$$g_n \coloneqq \frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}\chi_{[-n,n]}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
|g_n| &= \left|\frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}\right|\chi_{[-n,n]} \\
&\le \left|\frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}\right| \\
&= \left|\frac{\partial f}{\partial x} e^{-i\xi x} - ikfe^{-i\xi x}\right| \\
&\le \left|\frac{\partial f}{\partial x} e^{-i\xi x}\right| + \left|ikfe^{-i\xi x}\right| \\
&\overset{|e^{-i\xi x}|=1}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + |i\xi||f|.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist in $L^1(\mathbb{R})$, denn f, $\partial_x f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und damit nach Aufgabe 1 $f, \partial_x f \in L^1(\mathbb{R})$ und damit insbesondere $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + |i\xi||f| \in L^1(\mathbb{R})$. Da außerdem $g_n \to \frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}$ und g_n messbar, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und dem Hauptsatz (g_n auf kompaktem Intervall $[-n, n]$ stetig und R.-integrierbar, d.h. Lebesgue und R-Integral stimmen überein):

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \frac{\partial}{\partial x} f e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\left[f(n)e^{-i\xi n} - f(-n)e^{i\xi n}\right]\right| \\
&\overset{|e^{-i\varphi}|=1}{\le} \lim_{n\to\infty}|f(n)| + \lim_{n\to\infty}|f(-n)| \\
&\overset{f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})}{=} 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\widehat{f'} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f\frac{\partial}{\partial x}e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{=} i\xi\widehat{f}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Sei zunächst $j \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $H_1(x) = 2x = 2xH_0(x) - H_0'(x)$. Für $j > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
H_j'(x) &= (-1)^j 2xe^{x^2}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}e^{-x^2} + (-1)^j e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}x^{j+1}}e^{-x^2} \\
&= 2xH_j - H_{j+1}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Das zeigt die im Hinweis behauptete Identität. Damit folgt nun für $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \psi_j' &= H_j' e^{-\frac{x^2}{2}} - x H_j e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= H_j' e^{-\frac{x^2}{2}} - x\psi_j \\ &\overset{(3)}{=} (2xH_j - H_{j+1})e^{-\frac{x^2}{2}} - x\psi_j \\ &= 2x\psi_j - \psi_{j+1} - x\psi_j \\ &= x\psi_j - \psi_{j+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Das zeigt die linke Identität. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\psi_j}\right)'(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_j(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_j \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x\psi_j e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= -i\widehat{x\psi_j} \\ &\overset{(4)}{=} -i\widehat{\psi_{j+1}} - i\widehat{\psi_j'} \\ &\overset{0.3}{=} -i\widehat{\psi_{j+1}} - i(i\xi\widehat{\psi_j}) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_{j+1}} &= i(\widehat{\psi_j})' - i\xi\widehat{\psi_j} \\ &= -i(\xi\widehat{\psi_j} - (\widehat{\psi_j})'). \end{aligned} \tag{5}$$

Folgere die Behauptung nun per Induktion nach j. Für $j = 0$ ist $\psi_0 = H_0 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Also ψ_0 ist die Gaußfunktion und damit folgt $\widehat{\psi_0} = \lambda_0 \psi_0$ mit $\lambda_0 := 1$. Sei die Behauptung nun gezeigt für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt ausgehend von (5) für $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_{j+1}}(\xi) &= -i(\xi\widehat{\psi_j}(\xi) - (\widehat{\psi_j})'(\xi)) \\ &\overset{\text{IV}}{=} -i(\xi\lambda_j\psi_j(\xi) - \lambda_j\psi_j'(\xi)) \\ &= -i\lambda_j(\xi\psi_j(\xi) - \psi_j'(\xi)) \\ &\overset{(4)}{=} -i\lambda_j\psi_{j+1}. \end{aligned}$$

Mit $\lambda_{j+1} \coloneqq -i\lambda_j \in \{\pm 1, \pm i\}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 3. Seien $\alpha > 0$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Zunächst ist wegen $|e^{-i\varphi}| = 1$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $f, \tau_y f(x), \delta_\alpha f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und Aufgabe 1 (b) auch $fe^{-i\xi x}$, $\tau_y f e^{-i\xi x}$, $\delta_\alpha f e^{-i\xi x} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sei im folgenden $\xi \in \mathbb{R}^n$.

a) Mit der Vorbemerkung ist der Transformationssatz anwendbar mit $z = x - y$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_y f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\xi\cdot(z+y)} \,\mathrm{d}z \\ &= e^{-i\xi\cdot y} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\xi\cdot z} \,\mathrm{d}z \\ &= e^{-i\xi\cdot y} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

b) Mit der Vorbemerkung ist der Transformationssatz anwendbar mit $z = \alpha x$. Dann ist $\det(Dz) =$

α^n und es folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta_\alpha f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Trafo}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha^n} f(z) e^{-i\xi \cdot \frac{z}{\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\cdot z} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

c) Es ist $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(y-x) e^{-i\xi\cdot x}| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(y-x)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \||f| * |g|\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{\text{Zettel 7}}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist Fubini anwendbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{f\cdot g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y\right] e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_y g(x-y) e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{\tau_y g}(\xi) \, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \widehat{g}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\xi\cdot y} \, \mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Lemma 0.4. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist $g \circ \tau_n^m \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\tau_n^m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\tau_n^m(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Für $m = 1$ ist weiterhin $g \circ \pi_i^n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\pi_i^n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\pi_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig. Falls $\beta_j \neq 0$ für ein $m < j \leq n$. Dann ist $\partial_\beta \tau_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$. Also auch $\partial_\beta(g \circ \tau) = 0$. Sei also $\beta_j = 0$ für $m < j \leq n$ und bezeichne $\nu := (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}^n$, dass $|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}| \leq |x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \cdot \|x\|_\infty^{\sum_{i=m}^n \alpha_i}|$. Setze also $\mu := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \sum_{i=m}^n \alpha_i)$ Dann folgt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta(f \circ \tau)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\mu \partial_\nu f| < \infty.$$

Im Fall $m = 1$ existieren die π_i^n und die Argumentation verläuft exakt analog. □

Aufgabe 4. Zeige zunächst induktiv, dass $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Für $n = 1$ trivial, denn $f = f_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und Aussage gezeigt. Dann betrachte τ_n^{n+1}, π_i^{n+1} und π_i^n aus 0.4.

$$\begin{aligned} f &= \prod_{i=1}^{n+1} (f_i \circ \pi_i^{n+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (f_i \circ \pi_i^{n+1}) \cdot (f_{n+1} \circ \pi_{n+1}^{n+1}) \\ &= \overbrace{\tau_n^{n+1}\Big[\underbrace{\prod_{i=1}^{n} (f_i \circ \pi_i^{n})}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \text{ nach IV}} \Big]}^{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ nach 0.4}} \cdot \underbrace{(f_{n+1} \circ \pi_{n+1}^{n+1})}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ nach 0.4}} . \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1 (c) folgt damit, dass $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Das beendet die Induktion.

Nun ist insbesondere $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. Fubini ist anwendbar. Damit folgt für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) \,\mathrm{d}x_1 \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_n(x_n) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x_n \\ &\overset{\xi\cdot x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_i(x_i) e^{-i\xi_i x_i} \,\mathrm{d}x_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(\xi_i). \end{aligned}$$