

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: Das AWP (*) hat eine globale definierte Lösung u .

Beweis. Da f stetig existiert nach Peano eine lokale Lösung $y(t)$ auf $I := [t_0, t_0 + T]$. Es ist also

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in I.$$

Damit folgt $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| \, ds \\ &\stackrel{f \text{ linear beschränkt}}{\leq} \|y_0\| + \int_{t_0}^t (\alpha(s)\|y(s)\| + \beta(s)) \, ds \\ &= \|y_0\| + \int_{t_0}^t \alpha(s)\|y(s)\| \, ds + \int_{t_0}^t \beta(s) \, ds \end{aligned}$$

Da I kompaktes Intervall, nehmen $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ ihr Maximum an. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y_0\| + \alpha_{\max} \int_{t_0}^t \|y(s)\| \, ds + \beta_{\max}(t - t_0) \\ &\stackrel{t \leq T}{\leq} \|y_0\| + \alpha_{\max} \int_{t_0}^t \|y(s)\| \, ds + \beta_{\max} T \end{aligned}$$

Damit folgt mit dem Lemma von Gronwall

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \underbrace{e^{\alpha_{\max}(t-t_0)}(\|y_0\| + T\beta_{\max})}_{=: \rho(t)} \\ &\leq \rho(t). \end{aligned}$$

Da $\rho(t)$ stetig folgt globale Fortsetzbarkeit von $y(t)$. □

(b) Beh.: f_1 ist linear beschränkt.

Beweis. Aus der Taylorreihe von $\sin(t)$ folgt $|\sin(t)| \leq |t|$. Außerdem ist $\sqrt{|x|} \leq |x| + 1$. Damit folgt direkt

$$\begin{aligned} |f_1(t, (x_1, x_2))| &\leq |t||x_1|^{\frac{1}{2}} + |\sin(t)||x_2| \\ &\leq |t|(|x_1| + 1) + |t||x_2| \\ &\leq \underbrace{|t|}_{=: \alpha(t)}(|x_1| + |x_2|) + \underbrace{2|t|}_{=: \beta(t)} \\ &= \alpha(t) + \|x\|_1 + \beta(t). \end{aligned}$$

□

Beh.: f_2 ist linear beschränkt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |f_2(t, (x_1, x_2))| &\leq e^{-t^2|x_1|} + |x_1| \left| \frac{1}{1+x_2^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{e^{t^2|x_1|}} + |x_1| \\ &\leq 1 + |x_1| \\ &\leq \underbrace{1}_{=: \beta(t)} + \underbrace{|x_1|}_{=: \alpha(t)} \cdot \|x\|_1 \\ &= \alpha(t)\|x\|_1 + \beta(t). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Beh.: Das Taylorpolynom 4-ter Ordnung ist gegeben als

$$T_4(u, t, t_0 = 0) = t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4.$$

Beweis. u ist Lösung des AWP, d.h. es gilt

$$u''(t) = -\sin(u(t)) - 2u'(t), \quad t \geq 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} u^{(3)}(t) &= -\cos(u(t))u'(t) - 2u''(t) \\ u^{(4)}(t) &= \sin(u(t))u'(t)^2 - \cos(u(t))u''(t) - 2u^{(3)}(t) \end{aligned}$$

Mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} u^{(3)}(0) &= 3 \\ u^{(4)}(0) &= -4 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann

$$\begin{aligned} T_4(u, t) &= u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2}t^2 + \frac{u^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \frac{u^{(4)}(0)}{4!}t^4 \\ &= t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Beh.: Die Matrix $A(t)$ ist gegeben als

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 2t-t^2 & t-1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Durch Nachrechnen folgt

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -t \\ -t^2 & t + 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ folgt also

$$A(t) = \phi'(t)\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -t \\ -t^2 & t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 2t-t^2 & t-1 \end{pmatrix}.$$

□

Beh.: Die Lösung $u(t)$ ist gegeben als

$$u(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach VL gilt für die partikuläre Lösung mit $u_b(t_0 = 0) = (0, 0)^T$ und $b(t) = (1, t)^T$:

$$\begin{aligned} u_b(t) &= \phi(t) \left(\int_0^t \phi^{-1}(s)b(s) \, ds + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix} \, ds \\ &= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(0) = (1, 0)^T$ folgt

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1+t \\ t^2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix} + u_b(t) \\ u(0) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$c_1 = 0$ also insgesamt

$$u(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 4. (a) Beh.: Bedingung (**) für die eindeutige Lösbarkeit von (RWP-2.Ord) ist äquivalent zur Bedingung (*), wenn (RWP-2.Ord.) als System 1. Ordnung umformuliert wird.

Beweis. Es sei ein RWP-2.Ord. wie beschrieben gegeben. Definiere $y_1(t) := u(t)$ und $y_2(t) := y_1'(t)$. Dann mit

$$B_a = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

als äquivalente Randwertbedingung

$$B_a y(a) + B_b y(b) = g := \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\{y, z\}$ ein beliebiges Fundamentalsystem der homogenen Gleichung mit $\phi(a) = \mathbb{I}$. Dann gilt $y_1(a) = z_2(a) = 1$ und $y_2(a) = z_1(a) = 0$. Damit folgt mit

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_2(b) & \beta_0 z_1(b) + \beta_1 z_2(b) \end{pmatrix}$$

die zu (**) äquivalente Bedingung $\det(A) \neq 0$.

Damit g.z.z. $A = B_a + B_b \phi(b)$.

$$\begin{aligned} B_a + B_b \phi(b) &= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(b) & z_1(b) \\ y_2(b) & z_2(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_2(b) & \beta_0 z_1(b) + \beta_1 z_2(b) \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

□

(b) Hier gilt in Analogie zu (a) für (i) bis (iii): $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$ und $\beta_1 = 0$. Sei außerdem $u_1 = \sin(t)$ und $u_2 = \cos(t)$.

(i) Beh.: Es existiert eine eindeutige Lösung.

Beweis. Mit

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

und (a) folgt die Behauptung.

□

(ii) Beh.: Es existiert keine Lösung.

Beweis. Das Kriterium aus (a) liefert

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ang. es ex. eine Lösung $u(t)$ des RWP. Dann hat diese die Form $u(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$. Es gilt weiter $u(0) = 0 \implies c_2 = -1$, aber $u(\pi) = 0 \implies c_2 = 1$ ∇ .

□

(iii) Beh.: Es existieren unendlich viele Lösungen.

Beweis. Das Kriterium aus (a) liefert

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Z.z.: $\forall c_1 \in \mathbb{R}$ ist $u(t) = c_1 \sin(t) + 1$ eine Lösung des RWP. Es ist $u(0) = u(\pi) = 1$ und $u(t)$ ist mit c_1 und $c_2 = 0$ Lösung des RWP.

□