

|         |    |    |    |    |          |
|---------|----|----|----|----|----------|
| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | $\Sigma$ |
| Punkte  |    |    |    |    |          |

**Aufgabe 1.** Sei

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz \\ x + 2z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  gegeben als

$$g(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{wv}{w+2u} \\ \frac{w+2u}{w+2u} \\ \frac{v}{w+2u} \end{pmatrix}.$$

Denn  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt

$$g(f(x, y, z)) = g(yz, x + 2z, xy) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Analog für  $f(g(u, v, w)) = (u, v, w)^T$ .

Für die Jacobimatrizen folgt

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ 1 & 0 & 2 \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_g(u, v, w) = \begin{pmatrix} -2\frac{wv}{(w+2u)^2} & \frac{w}{w+2u} & \frac{2uv}{(w+2u)^2} \\ \frac{2}{v} & -\frac{2+2u}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{vw}{(w+2u)^2} & \frac{u}{w+2u} & -\frac{vu}{(w+2u)^2} \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt  $(x, y, z)^T = (2, 1, 0)$  folgt  $f(2, 1, 0) = (0, 2, 2)^T$ . Damit folgt

$$D_f(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_g(0, 2, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$D_f(2, 1, 0)D_g(0, 2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also  $D_f(2, 1, 0)^{-1} = D_g(0, 2, 2)$ .

**Aufgabe 2.** Sei

$$P := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\} \quad \text{und} \quad Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Setze

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2^2 \\ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z - 1 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Nebenbedingung äquivalent zu  $g(x) = 0$ . Minimiere nun  $f(x)$  unter  $g(x) = 0$ . Es gilt

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\text{Rg}(J_g(x)) = 2$ , also ist mit Lagrangeregeln notwendige Bedingung für Minimum:

$$J_f(\hat{x})^T \lambda = \nabla f(\hat{x}).$$

Damit folgt das Gleichungssystem

$$x + y - z - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_1 + 2x\lambda_2 = 2x \quad (3)$$

$$\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2y \quad (4)$$

$$-\lambda_1 = 2z. \quad (5)$$

Sei zunächst  $x \neq y$ . Ziehe (4) von (3) ab. Damit folgt

$$\lambda_2(x - y) = x - y \implies \lambda_2 = 1.$$

Aus (5) folgt direkt  $\lambda_1 = -2z$ . Damit folgt mit (3):

$$-2z + 2x = 2x \implies -2z = 0 \implies z = 0.$$

Eingesetzt in (1) und in (2) ergibt das

$$x + y - 1 = 0 \implies x = 1 - y \xrightarrow{(2)} (1 - y)^2 + y^2 - 1 = 0 \implies y(y - 1) = 0 \implies y_1 = 0 \wedge y_2 = 1.$$

Damit ergeben sich  $x_1 = 1 - y_1 = 1$  und  $x_2 = 1 - y_2 = 0$ , also  $P_1 = (1, 0, 0)^T$  und  $P_2 = (0, 1, 0)^T$ . Hier gilt  $f(P_1) = \|P_1\|_2^2 = 1$  und  $f(P_2) = \|P_2\|_2^2 = 1$ .

Falls nun  $x = y$ . Dann folgt aus (2) direkt  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  und damit mit (1)  $z = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ . Allerdings ist dann bereits  $f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{2}{\sqrt{2}} - 1) > 1$ , d.h. dies kann kein Minimum sein.

Es bleiben also  $P_1$  und  $P_2$ . Da  $f(P_1) = f(P_2)$  sind beide Minima.

**Aufgabe 3.** Definiere

$$f(x): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^2 + 3x_1 - 8x_2 + 2x_3$$

$$g(x): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist das gegebene Optimierungsproblem äquivalent zu der Minimierung von  $f$  unter  $g(x) = 0$ .

Mit

$$Q := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

folgt

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x.$$

Mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$g(x) = Ax - b.$$

Es ist  $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (Qx)_i - \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n Q_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n Q_{ij} x_i x_j \right] - \sum_{i=1}^n c_i x_i \end{aligned}$$

Da  $Q$  symmetrisch, folgt  $Q_{ij} = Q_{ji}$ , also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left[ 2Q_{ii}x_i + 2 \sum_{j=1}^n Q_{ij}x_j \right] - c_i \\ &= \sum_{j=1}^n Q_{ij}x_j - c_i \\ &= (Qx)_i - c_i\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\nabla f(x) = Qx - c.$$

Mit der Definition von  $g$  und  $A$  folgt außerdem direkt  $J_g(x) = A$ . Wegen  $\text{Rg}(A) = 2$  folgt mit der Lagrangeregeln und die Bedingung für ein Minimum für  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}A^T \lambda &= Qx - c \\ Ax &= b.\end{aligned}$$

Löse zunächst  $Ax = b$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{-3} \\ \leftarrow + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & -7 & 5 & -19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | -1 \leftarrow + \\ | -\frac{1}{7} \boxed{-3} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt als Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{19}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right).$$

Also folgt für  $a \in \mathbb{R}$ :

$$x = \begin{pmatrix} 1 + a \\ 2 + 5a \\ -1 + 7a \end{pmatrix}.$$

Setze jetzt in  $A^T \lambda = Qx - c$  ein:

$$A^T \lambda = Qx - c = \begin{pmatrix} 5 + 18a \\ -1 + 27a \\ 49a \end{pmatrix}.$$

und löse

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -18 \\ 3 & 2 & -27 \\ -2 & -1 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kurze Rechnung ergibt  $a = 0$ . Damit folgt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da  $f(1, 2, -1) = -12$  und für  $y = (2, 7, 6)^T \in L$  ist  $f(y) = 242 > -12$  folgt  $x = (1, 2, -1)^T$  löst das Minimierungsproblem.

**Aufgabe 4.** (a) Definiere:

$$\begin{aligned}x_1 &:= v_1(t) \\ x_2 &:= v_1'(t) \\ x_3 &:= v_2(t) \\ x_4 &:= v_2'(t) \\ x_5 &:= v_2''(t) \\ x_6 &:= v_2'''(t).\end{aligned}$$

Das gegebene Gleichungssystem lässt sich dann so formulieren

$$\begin{aligned}x'_6(t) - a(g(t) - bx_3(t)) &= f(t) \\ x'_2(t) + bx_3(t) &= g(t).\end{aligned}$$

Dann folgt für das gegebene Gleichungssystem das äquivalente Gleichungssystem 1. Ordnung:

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ g(t) - bx_3(t) \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ a(g(t) - bx_3(t)) + f(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Seien  $u_1, u_2$  Lösungen von (\*). Dann gilt

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \frac{d}{dt}u_1(t) & \frac{d}{dt}u_2(t) \end{pmatrix} = u_1 \frac{d}{dt}u_2(t) - u_2(t) \frac{d}{dt}u_1(t).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(t) &= \frac{d}{dt} \left( u_1 \frac{d}{dt}u_2 \right) - \frac{d}{dt} \left( u_2 \frac{d}{dt}u_1 \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt}u_1 \right) \left( \frac{d}{dt}u_2 \right) + u_1 \frac{d^2}{dt^2}u_2 - \left( \frac{d}{dt}u_2 \right) \left( \frac{d}{dt}u_1 \right) - u_2 \frac{d^2}{dt^2}u_1 \\ &= u_1 \frac{d^2}{dt^2}u_2 - u_2 \frac{d^2}{dt^2}u_1 \\ &\stackrel{(*)}{=} u_1 \left[ -p \frac{d}{dt}u_2 - qu_2 \right] - u_2 \left[ -p \frac{d}{dt}u_1 - qu_1 \right] \\ &= -u_1 p \frac{d}{dt}u_2 - u_1 qu_2 + u_2 p \frac{d}{dt}u_1 + u_2 qu_1 \\ &= -p \left( u_1 \frac{d}{dt}u_2 - u_2 \frac{d}{dt}u_1 \right) \\ &= -pW(t).\end{aligned}$$