

1 Projektive Moduln und Algebren (Vortrag 8)

Satz 1.1 (Projektiv ist lokal frei). *Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

- (i) M ist endlich erzeugter projektiver A -Modul.
- (ii) M ist endlich präsentiert und $M_{\mathfrak{p}}$ ist freier $M_{\mathfrak{p}}$ -Modul für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.
- (iii) Es existieren Elemente $\{f_i\}_{i \in I}$ von A mit $\sum_{i \in I} (f_i) = A$, sodass M_{f_i} freier, endlich erzeugter A_{f_i} Modul ist.

Proof. Siehe Theorem 4.6 in Lenstra. □

Satz 1.2. *Sei B eine A -Algebra und C eine treuflache A -Algebra, sodass $B \otimes_A C$ projektive, separable C -Algebra ist. Dann ist B projektive, separable A -Algebra.*

Proof. Vortrag 8. Theorem 4.14 in Lenstra. □

Satz 1.3. *Sei A ein Ring und B projektive separable A -Algebra. Dann existiert eine B -Algebra C und ein B -Algebraisomorphismus $B \otimes_A B \rightarrow B \times C$.*

Proof. Vortrag 8. Proposition 4.16 in Lenstra. □

Bemerkung 1.4. Sei B endliche projektive A -Algebra und $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Nach 1.1 existiert eine Familie $\{f_i\}_{i \in I}$, sodass $A = \sum_{i \in I} (f_i)$ und B_{f_i} endliche, freie A_{f_i} -Algebra. Da $\mathfrak{p} \subsetneq A$ existiert ein $i \in I$, sodass $f_i \notin \mathfrak{p}$. Also ist $A_{\mathfrak{p}} = (A_{f_i})_{\mathfrak{p}}$ und $B_{\mathfrak{p}} = (B_{f_i})_{\mathfrak{p}}$, also insbesondere $B_{\mathfrak{p}}$ endliche freie $A_{\mathfrak{p}}$ -Algebra.

Definition 1.5 (Grad). Sei B endliche projektive A -Algebra. Dann ist

$$[B : A] : \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \mapsto \text{rank}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$$

die Gradabbildung.

Satz 1.6. *Sei B endliche, projektive A -Algebra. Dann gilt*

- (a) $A \rightarrow B$ ist genau dann injektiv, wenn $[B : A] \geq 1$.
- (b) $A \rightarrow B$ ist genau dann surjektiv, wenn $[B : A] \leq 1$.
- (c) $A \rightarrow B$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $[B : A] = 1$.

Proof. Vortrag 8. □

Lemma 1.7. *Sei B endliche, projektive A -Algebra. Dann ist $[B : A]$ lokalkonstant, das heißt eine stetige Abbildung $\text{Spec } A \rightarrow \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie trägt. Insbesondere ist die Menge*

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid [B : A](\mathfrak{p}) = n\}$$

offen und abgeschlossen in $\text{Spec } A$ und $[B : A]$ ist konstant, falls $\text{Spec } A$ zusammenhängend ist.

Proof. Erneut nach 1.1 seien $\{f_i\}_{i \in I}$ in A , sodass $A = \sum_{i \in I} (f_i)$ und B_{f_i} endliche, freie A_{f_i} -Algebra für alle $i \in I$. Dann ist $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$, wobei $D(f_i) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f_i \notin \mathfrak{p}\}$. Per Definition der Zariskitopologie auf $\text{Spec } A$ sind die Mengen $D(f_i)$ offen und $[B : A]|_{D(f_i)}$ ist konstant. □

1.1 Aufgaben nach Vortrag 8

Satz 1.8 (Komposition). *Sei A ein Ring, B endliche, projektive A -Algebra und C endliche, projektive B -Algebra. Dann ist C endliche, projektive A -Algebra.*

Proof. Sei $A^n = B \oplus Q$ und $B^m = C \oplus P$. Dann haben wir Isomorphismen von A -Moduln

$$A^{mn} = (A^n)^m = (B \oplus Q)^m = B^m \oplus Q^m = C \oplus P \oplus Q^m.$$

□

Satz 1.9 (Basiswechsel endlich projektive). *Sei B endlich projektive A -Algebra und C eine weitere A -Algebra. Dann ist $B \otimes_A C$ endlich projektive C -Algebra. Insbesondere kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } C & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } A \\ & \searrow \scriptstyle [B \otimes_A C : C] & \swarrow \scriptstyle [B : A] \\ & \mathbb{Z} & \end{array}.$$

Proof. Da B endlich erzeugter, projektiver A -Modul ist, existiert ein A -Modul Q , sodass $A^n \simeq B \oplus Q$ als A -Moduln für ein $n \geq 0$. Da der natürliche Isomorphismus $A^n \otimes_A C \rightarrow C^n$ auch C -linear ist, folgt durch Tensorieren mit C

$$C^n \simeq A^n \otimes_A C \simeq (B \oplus Q) \otimes_A C = (B \otimes_A C) \oplus (Q \otimes_A C).$$

Also ist $B \otimes_A C$ (endlich erzeugter) projektiver C -Modul.

Für die Grade: Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec } C$ und $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}^c$. Sei weiter $\text{rank}_{A_{\mathfrak{q}}} B_{\mathfrak{q}} = n$. Also folgt

$$(B \otimes_A C)_{\mathfrak{q}} = B \otimes_A C \otimes_A A_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{q}} \otimes_A C = A_{\mathfrak{q}}^n \otimes_A C = (A^n \otimes_A C)_{\mathfrak{q}} = (C^n)_{\mathfrak{q}}.$$

Die natürlichen Isomorphismen sind auch $C_{\mathfrak{q}}$ linear, also folgt $\text{rank}_{C_{\mathfrak{q}}} (B \otimes_A C)_{\mathfrak{q}} = n$. Da $(B \otimes_A C)_{\mathfrak{p}}$ bzw. $C_{\mathfrak{p}}$ eine Lokalisierung von $(B \otimes_A C)_{\mathfrak{q}}$ bzw. $C_{\mathfrak{q}}$ ist und Lokalisieren den Grad erhält, folgt die Behauptung. □

Lemma 1.10. *Sei M endlich präsentierter A -Modul, das heißt es existiere eine exakte Folge*

$$A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Sei weiter C eine A -Algebra und N ein A -Modul. Falls N oder C flach sind, ist der natürliche C -Modulhomomorphismus

$$\text{Hom}_A(M, N) \otimes_A C \rightarrow \text{Hom}_C(M \otimes_A C, N \otimes_A C)$$

ein Isomorphismus.

Proof. Da Tensorieren rechtsexakt ist und $\text{Hom}_C(-, N \otimes_A C)$ linksexakt, erhalten wir durch anwenden in dieser Reihenfolge auf die exakte Folge $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$, die exakte Folge

$$0 \rightarrow \text{Hom}_C(M \otimes_A C, N \otimes_A C) \rightarrow (N \otimes_A C)^n \rightarrow (N \otimes_A C)^m.$$

Andererseits liefert zunächst anwenden von $\text{Hom}_A(-, N)$ die exakte Folge

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow N^n \rightarrow N^m.$$

Tensorieren mit C liefert die exakte Folge

$$\underbrace{\text{Tor}_1^A(N^m, C)}_{=0} \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \otimes_A C \rightarrow (N \otimes_A C)^n \rightarrow (N \otimes_A C)^m.$$

Der linke Term verschwindet, weil N^m oder C flach ist. Untereinanderschreiben der beiden Folgen mit den natürlichen Homomorphismen und Auffüllen mit 0 nach links liefert ein kommutatives Diagramm und mit dem 5-er Lemma die Behauptung. □

Bemerkung 1.11. 1.10 wendet sich insbesondere dann an, wenn M endlich erzeugter projektiver Modul ist.

Korollar 1.12. Seien M, N A -Moduln und M endlich präsentiert. Sei weiter $S \subset A$ ein multiplikatives System. Dann ist der natürliche $S^{-1}A$ -Modulhomomorphismus

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

ein Isomorphismus.

2 Technische Randbemerkungen

Lemma 2.1. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Dann ist $f(S)$ ein multiplikatives System von B und

$$S^{-1}B \simeq f(S)^{-1}B$$

als $S^{-1}A$ -Algebren.

Proof. Die Formel $\frac{b}{s} \mapsto \frac{b}{f(s)}$ induziert den Isomorphismus. □

Lemma 2.2. Sei A ein Ring, M ein A -Modul und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist

$$M_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} M_f$$

wobei $A \setminus \mathfrak{p}$ durch die Teilbarkeitsrelation halbgeordnet ist.

Proof. Für eine multiplikative Menge S vertaucht $- \otimes_A S^{-1}A$ mit Kolimites, da das Tensorprodukt linksadjungiert ist. Es genügt also den Fall $M = A$ zu zeigen.

Sei $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist S halbgeordnet und gerichtet. Für alle $f \in S$ ist $\frac{f}{1} \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$, also existiert eine natürliche Abbildung $A_f \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Für $f, g \in S$ mit $f \mid g$ kommutieren diese Abbildungen mit $A_f \rightarrow A_g$ und induzieren damit eine Abbildung $\varinjlim_{f \in S} A_f \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Wir zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist.

Surjektiv: Sei $x = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$. Also $f \in S$ und das Bild von $\frac{a}{f} \in A_f$ in $\varinjlim_{f \in S} A_f$ ist ein Urbild von x . Injektiv: Sei $x \in \varinjlim_{f \in S} A_f$ mit Bild 0 in $A_{\mathfrak{p}}$. Dann existiert ein $f \in S$ und $a \in A$, sodass $\frac{a}{f^n} = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$. Also existiert ein $g \in S$, sodass $ga = 0$. Insbesondere ist $fga = 0$ also $\frac{a}{f} = 0$ in A_{fg} . Außerdem ist $f \mid fg$ und damit $x = 0$. □

Lemma 2.3. Sei $f: A \rightarrow B$ Ringhomomorphismus und $\varphi: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ die induzierte Abbildung. Dann ist für $a \in A$:

$$\varphi^{-1}(D(a)) = D(f(a)).$$

Proof. $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(D(a)) \iff \varphi(\mathfrak{p}) \in D(a) \iff a \notin \varphi(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p}) \iff \mathfrak{p} \notin D(f(a)).$ □

3 Endlich étale Morphismen

Definition 3.1. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. f ist *endlich und lokal frei*, wenn eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ existiert, sodass $A = \sum_{i \in I} (f_i)$ und B_{f_i} endliche, freie A_{f_i} Algebra ist für alle $i \in I$.

Bemerkung 3.2. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist f genau dann endlich und lokal frei, wenn B endliche, projektive A -Algebra ist.

Proof. 1.1 □

Bemerkung 3.3 (Zariskiüberdeckung). Eine Überdeckung von A wie in 3.1 nennen wir im Folgenden Zariskiüberdeckung. Elemente $\{f_i\}_{i \in I}$ sind genau dann eine Zariskiüberdeckung von A , wenn $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.

Proof. $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \iff$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ existiert ein f_i , sodass $f_i \notin \mathfrak{p} \iff$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ ist das Ideal (f_i) nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten $\iff A = (f_i)$ □

Geometrisch denke man bei $\varphi: A \rightarrow B$ an $\psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Wegen $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ für $f \in A$, entspricht $A_f \rightarrow B_f = B_{\varphi(f)}$ also geometrisch einfach der Einschränkung von ψ auf $\psi^{-1}(D(f)) \rightarrow D(f)$.

Aus Vorträgen 7 und 8 kennen wir den folgenden Zusammenhang:

Satz 3.4 (Äquivalente Charakterisierungen von endlich étale). *Sei $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent*

- (i) $A \rightarrow B$ endlich étale, das heißt endlich, flach und unverzweigt.
- (ii) $A \rightarrow B$ endlich, projektiv und separabel.
- (iii) $A \rightarrow B$ endlich, projektiv und $\Omega_{B/A} = 0$.
- (iv) Es existiert eine Zariskiüberdeckung $\{f_i\}_{i \in I}$ von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich étale ist.
- (v) Es existiert eine Zariskiüberdeckung $\{f_i\}_{i \in I}$ von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich frei und separabel ist.

Proof. (iv) $\Rightarrow$ (v): Sei $\{f_i\}_{i \in I}$ eine Zariskiüberdeckung von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich étale ist. Nach 1.1 existiert also für alle $i \in I$ eine Zariskiüberdeckung $\left\{\frac{f_{ij}}{1}\right\}$ von A_{f_i} , sodass $(A_{f_i f_{ij}}) = (A_{f_i})_{f_{ij}} \rightarrow B_{f_i f_{ij}} = (B_{f_i})_{f_{ij}}$ endlich, frei und separabel (da Lokalisieren Separabilität erhält) ist. Zudem ist $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_j D(f_i f_{ij})$, also ist $\{f_i f_{ij}\}_{i,j}$ eine Zariskiüberdeckung von A .

(v) $\Rightarrow$ (i): Sei $\{f_i\}_{i \in I}$ eine Zariskiüberdeckung von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich frei und separabel ist. Nach 1.1 ist also $A \rightarrow B$ endlich und projektiv. Es genügt also $\Omega_{B/A} = 0$ zu zeigen. Dazu sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ beliebig. Dann ist

$$(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{p}} = \Omega_{B/A} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = \Omega_{B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} / A_{\mathfrak{p}}} = \Omega_{B_{\mathfrak{p}} / A_{\mathfrak{p}}}.$$

Da $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ existiert nun ein $i \in I$, sodass $f_i \notin \mathfrak{p}$. Also $A_{\mathfrak{p}} = (A_{f_i})_{\mathfrak{p}} \rightarrow (B_{f_i})_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$ formal unverzweigt, da $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ formal unverzweigt. Also ist $\Omega_{B_{\mathfrak{p}} / A_{\mathfrak{p}}} = 0$ und damit $A \rightarrow B$ endlich étale. □

Bemerkung 3.5. Jede endlich étale Algebra ist also insbesondere endlich und lokal frei.

3.1 Stabilität von endlich étale

Satz 3.6 (Basiswechsel endlich étale). *Sei B endlich étale A -Algebra und C eine weitere A -Algebra. Dann ist $B \otimes_A C$ endlich étale C -Algebra.*

Proof. Flache (bzw. endlich präsentierte) Homomorphismen sind stabil unter Basiswechsel. Außerdem ist $\Omega_{B \otimes_A C/C} = \Omega_{B/A} \otimes_A C = 0$. Also ist $B \otimes_A C$ auch formal unverzweigt und damit endlich étale über C . $\square$

Satz 3.7 (Komposition endlich étale). *Sei B endlich étale A -Algebra und C endlich étale B -Algebra. Dann ist C endlich étale A -Algebra.*

Proof. Flache (bzw. endlich präsentierte) Homomorphismen sind stabil unter Komposition. Außerdem haben wir die exakte Kotangentialfolge

$$\underbrace{C \otimes_B \Omega_{B/A}}_{=0} \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow \underbrace{\Omega_{C/B}}_{=0} \longrightarrow 0 .$$

Aus der Exaktheit folgt also $\Omega_{C/A} = 0$. $\square$

3.2 Grad

Definition 3.8 (Treuprojektive Algebren). Sei B endliche projektive A -Algebra. Dann ist B *treuprojektiv*, wenn $[B : A] \geq 1$.

Satz 3.9. *Sei B endliche, projektive A -Algebra. Dann ist*

- (a) $B = 0 \iff [B : A] = 0$.
- (b) $A \rightarrow B$ Isomorphismus $\iff [B : A] = 1$.
- (c) $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ surjektiv $\iff B$ treuprojektive A -Algebra.

Proof. (a) $B = 0 \iff B_{\mathfrak{p}} = 0 \ \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A \iff \text{rang}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}} = 0 \ \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A \iff [B : A] = 0$.

(b) Das ist 1.6(c).

(c) Sei $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ surjektiv und sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ mit Urbild $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$. Also ist $B \neq 0$ und damit $B_{\mathfrak{q}} \neq 0$. Sei $\varphi: A \rightarrow B$ der induzierte Ringhomomorphismus, $S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ und $T = B \setminus \mathfrak{q}$. Wegen $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, folgt $S \subseteq T$. Und damit

$$B_{\mathfrak{q}} = T^{-1}B \simeq (S^{-1}T)^{-1}(S^{-1}B) = (S^{-1}T)^{-1}B_{\mathfrak{p}},$$

also ist $B_{\mathfrak{q}}$ eine Lokalisierung von $B_{\mathfrak{p}}$. Also folgt auch $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$, also $[B : A](\mathfrak{p}) > 0$. Rückrichtung: Mit 1.6(a) ist $A \rightarrow B$ injektiv und weil B endliche A -Algebra, ist B ganze Ringerweiterung von A , also folgt die Aussage aus (einer Variante von) Going-Up (siehe Macdonald Theorem 5.10). $\square$

Satz 3.10 (Treuprojektiv ist treuflach). *Sei B treuprojektive A -Algebra. Dann ist B treuflach.*

Proof. Wir zeigen die Kontraposition: Sei B nicht treuflach, dann existiert nach Algebra 2 ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von A , sodass $B = \mathfrak{m}B$. Dann folgt insbesondere $B_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$. Da $B_{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugter $A_{\mathfrak{m}}$ -Modul folgt mit Nakayama $B_{\mathfrak{m}} = 0$, also $[B : A](\mathfrak{m}) = 0 < 1$. $\square$

Korollar 3.11. *Sei B eine A -Algebra und C treuprojektive A -Algebra. Dann ist B genau dann endlich étale A -Algebra, wenn $B \otimes_A C$ endlich étale C -Algebra ist.*

Proof. Die Hinrichtung gilt für beliebige Basiswechsel nach 3.6. Zur Rückrichtung: Nach 3.10 ist C treuflach. Damit folgt die Behauptung aus 1.2. $\square$

Bemerkung 3.12 (Offene und abgeschlossene Mengen in $\text{Spec } A$). Sei A ein Ring. Dann sind die offenen und abgeschlossenen Mengen in $\text{Spec } A$ von der Form $D(e)$, wobei e idempotent und eindeutig bestimmt ist. Insbesondere existiert für alle $n \geq 0$ genau ein Idempotent e , sodass $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid [B : A](\mathfrak{p}) = n\} = D(e)$.

Lemma 3.13. Sei A ein Ring und $\{f_i\}_{i \in I}$ Elemente von A , sodass $\text{Spec } A = \coprod_{i \in I} D(f_i)$. Dann ist der natürliche Ringhomomorphismus

$$A \longrightarrow \prod_{i \in I} A_{f_i}$$

ein Isomorphismus.

Proof. Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ und $i \in I$. Falls $f_i \notin \mathfrak{p}$ ist $(A_{f_i})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$. Sei nun $f_i \in \mathfrak{p}$. Beh.: $(A_{f_i})_{\mathfrak{p}} = 0$.

Wir zeigen f_i nilpotent in $A_{\mathfrak{p}}$. Sei $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A$ mit $f_i \notin \mathfrak{q}$. Dann ist $\{\mathfrak{q}\} \subseteq D(f_i)$ und $D(f_i)$ ist abgeschlossen. Also folgt $V(\mathfrak{q}) = \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq D(f_i)$. Da $\mathfrak{p} \notin D(f_i)$, folgt a fortiori $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{q})$. M.a.W.: $\mathfrak{q} \notin \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$. Kontraposition: Für $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ folgt bereits $f_i \in \mathfrak{q}$. Also ist f_i nilpotent in $A_{\mathfrak{p}}$ und damit $(A_{f_i})_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})_{f_i} = 0$.

Es existiert nun genau ein $i_0 \in I$, sodass $\mathfrak{p} \in D(f_{i_0})$. Lokalisieren von $A \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ ergibt also

$$A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \left(\prod_{i \in I} A_{f_i} \right)_{\mathfrak{p}} = \prod_{i \in I} (A_{f_i})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, da Spektren von Ringen quasikompakt sind, das heißt I endlich ist. Weil Isomorphismus eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 3.14 (Total zerlegbare Algebren). Eine A -Algebra B ist *total zerlegbar*, wenn A ein endliches Produkt von Ringen A_n ist mit $n \geq 0$ und B isomorph ist zu $\prod_{n \geq 0} A_n^n$, sodass

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sim} & \prod_{n \geq 0} A_n^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\sim} & \prod_{n \geq 0} A_n \end{array}$$

kommutiert.

Satz 3.15. Sei B eine A -Algebra. Dann ist B genau dann endlich étale, wenn $B \otimes_A C$ total zerlegbare C -Algebra ist für eine treuprojektive A -Algebra C .

Proof. Die Rückrichtung ist klar nach 3.11. Hinrichtung: Sei B eine endlich étale A -Algebra und sei zunächst $[B : A] = n$ konstant. Dann zeigen wir die Behauptung per Induktion nach n .

Falls $n = 0$: Dann ist $B = 0$ und wir können $C = A$ setzen. Sei nun $n > 0$. Nach 1.3 existiert eine B -Algebra B' und ein Isomorphismus von B -Algebren $B \otimes_A B \rightarrow B \times B'$. Nach 3.6 ist $B \otimes_A B$ endlich étale B -Algebra und $[B \otimes_A B : B] = n$. Wenn B natürlicherweise als B -Algebra aufgefasst wird, ist $[B : B] = 1$, also nach 4.1 $[B' : B] = [B \times B' : B] - [B : B] = n - 1$. Also wendet sich die Induktionsvoraussetzung an und es gibt eine treuprojektive B -Algebra C , sodass $B' \otimes_B C$ total zerlegbare C -Algebra ist.

Dann ist $B \otimes_A C = B \otimes_A B \otimes_B C = (B \times B') \otimes_B C = (B \otimes_B C) \times (B' \otimes_B C) = C \times (B' \otimes_B C)$. Da C und $B' \otimes_B C$ als C -Algebren total zerlegbar sind, ist auch $B \otimes_A C$ total zerlegbar als C -Algebra.

Nach 1.8 ist C endliche, projektive A -Algebra. Da $[B : A] \geq 1$ und $[C : B] \geq 1$ ist $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ surjektiv, also C treuprojektive A -Algebra nach 3.9.

Im Allgemeinen Fall sei $\text{Spec } A = \coprod_{n \geq 0} [B : A]^{-1}(\{n\})$. Dann existieren idempotente Elemente $(e_n)_{n \geq 0}$, sodass $D(e_n) = [B : A]^{-1}(\{n\})$, also $\text{Spec } A = \coprod_{n \geq 0} D(e_n)$. Mit 3.13 ist also $A = \prod_{n \geq 0} A_{e_n}$, wobei wegen der Quasikompaktheit von $\text{Spec } A$ fast alle $e_n = 0$ sind. Mit 4.2 ist also $B = \prod_{n \geq 0} B_{e_n}$ mit $A_{e_n} \rightarrow B_{e_n}$ endlich étale.

Nun ist $[B_{e_n} : A_{e_n}] = n$ und mit dem ersten Teil existiert eine treuprojektive A_{e_n} -Algebra C_n , sodass $B_{e_n} \otimes_A C_n$ total zerlegbare C_n -Algebra ist. Setze nun $C = \prod_{n \geq 0} C_n$. Nach 4.2 ist C endliche, projektive A -Algebra und $[C : A]_{D(e_n)} = [C_{e_n} : A_{e_n}] \geq 1$, also $[\bar{C} : A] \geq 1$ und damit C treuprojektiv.

Weiter ist

$$B \otimes_A C = \left(\prod_{n \geq 0} B_{e_n} \right) \otimes_{\prod_{n \geq 0} A_{e_n}} \left(\prod_{n \geq 0} C_n \right) = \prod_{n \geq 0} B_{e_n} \otimes_{A_{e_n}} C_n \simeq \prod_{n \geq 0} C_n^n$$

wobei der letzte Isomorphismus aus der totalen Zerlegbarkeit von $B_{e_n} \otimes_{A_{e_n}} C_n$ folgt. $\square$

Sei A ein Ring und E eine endliche Menge. Dann schreiben wir A^E für $\prod_{e \in E} A$. Sei $\phi: D \rightarrow E$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen. Für $d \in D$ sei $\psi_d: A^E \rightarrow A$ gegeben durch $(a_e)_{e \in E} \mapsto a_{\phi(d)}$. Das induziert einen Ringhomomorphismus $A^E \rightarrow A^D$.

Lemma 3.16. *Der induzierte Ringhomomorphismus $A^E \rightarrow A^D$ ist endlich étale.*

Proof. $A \rightarrow A$ und $A \rightarrow 0$ sind endlich étale, also mit 4.2 auch $\psi_d: A^E \rightarrow A = A \times 0 \times \dots \times 0$ und damit $A^E \rightarrow A^D$ nach 4.1. $\square$

Wir benötigen noch zwei Lemmata aus der kommutativen Algebra:

Lemma 3.17. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Dann hat A keine nicht-trivialen idempotenten Elemente.*

Proof. Sei $e \in A$ idempotent. Dann ist $e(1 - e) = e^2 - e = e - e = 0$. Falls $e \in A^\times$, folgt $1 - e = 0$ also $e = 1$. Falls $e \notin A^\times$: Dann ist $e \in \mathfrak{m}$. Angenommen $1 - e \in \mathfrak{m}$, dann ist auch $1 = 1 - e + e \in \mathfrak{m}$. Widerspruch. Also ist $1 - e \notin \mathfrak{m}$. Da A lokal, ist also $1 - e \in A^\times$ und damit $e = 0$. $\square$

Lemma 3.18. *Sei A ein Ring ohne nicht-triviale Idempotente und seien E, D endliche Mengen. Dann ist jeder A -Algebra Homomorphismus $A^E \rightarrow A^D$ induziert von einer Abbildung $D \rightarrow E$.*

Proof. Sei $\psi: A^E \rightarrow A^D$ ein A -Algebra Homomorphismus. Setze $f_e := (\delta_{\tilde{e}e})_{\tilde{e} \in E} \in A^E$. Dann ist $f_e^2 = 1$ und $f_e f_{\tilde{e}} = 0$ falls $e \neq \tilde{e}$.

Sei nun $d \in D$ beliebig. Dann gilt $\psi(f_e)^2 = \psi(f_e^2) = \psi(f_e)$, also $\psi(f_e)_d$ idempotent, also $\psi(f_e)_d \in \{0, 1\}$. Weiter ist $1 = \psi(1)_d = \psi(\sum_{e \in E} f_e)_d$ und für $e \neq \tilde{e} \in E$ ist $0 = \psi(f_e f_{\tilde{e}})_d = \psi(f_e)_d \psi(f_{\tilde{e}})_d$. Es existiert also genau ein $e(d) \in E$, sodass $\psi(f_e)_d = 1$.

Setze nun $\phi: D \rightarrow E$, $d \mapsto e(d)$. Nun sei $f = (a_e)_{e \in E} \in A^E$ beliebig. Dann gilt $f = \sum_{e \in E} a_e f_e$ und

$$\psi(f)_d = \sum_{e \in E} a_e \psi(f_e)_d = a_{\phi(d)}.$$

$\square$

Lemma 3.19. *Seien A, B, C Ringe und $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$ total zerlegbar und $h: C \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus mit $f = hg$. Sei weiter $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Dann existiert ein $a \in A$, sodass $a \notin \mathfrak{p}$ und f, g und h trivial über $D(a)$ sind. Das heißt es existieren endliche Mengen D und E*

und Isomorphismen $\alpha: A_a^D \rightarrow B_a$ und $\beta: A_a^E \rightarrow C_a$ und eine Abbildung $\phi: D \rightarrow E$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 B_a & \xleftarrow{h} & & C_a & \\
 \uparrow f & \swarrow \alpha & A_a^D & \xleftarrow{\quad} & A_a^E & \searrow \beta & \uparrow g \\
 A_a & & & & & & A_a \\
 & & \xleftarrow{\text{id}_{A_a}} & & & &
 \end{array}$$

kommutiert.

Proof. Da die Mengen der Form $D(a)$ eine Basis der Topologie von $\text{Spec } A$ bilden, kann a so gewählt werden, dass $[B : A]$ und $[C : A]$ von konstantem Grad auf $D(a)$ sind mit $\mathfrak{p} \in D(a)$. Durch Ersetzen von A, B und C durch A_a, B_a und C_a können wir wegen der totalen Zerlegbarkeit von f und g ohne Einschränkung annehmen, dass $B \simeq A^D$ und $C \simeq A^E$.

Der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ hat nach 3.17 keine nicht trivialen idempotenten Elemente. Also ist die induzierte Abbildung $h: A_{\mathfrak{p}}^E \rightarrow A_{\mathfrak{p}}^D$ nach 3.18 induziert von einer Abbildung $\phi: D \rightarrow E$. ϕ induziert nun eine Abbildung $\psi: A^E \rightarrow A^D$ und h und ψ haben selbes Bild in

$$\text{Hom}_A(A^E, A^D)_{\mathfrak{p}} \stackrel{1.12}{=} \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}^E, A_{\mathfrak{p}}^D).$$

Nach 2.2 existiert nun ein $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, sodass h und ψ die selbe Abbildung $A_a^E \rightarrow A_a^D$ induzieren. $\square$

Satz 3.20. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: A \rightarrow C$ endlich étale Ringhomomorphismen und $h: C \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus mit $f = gh$. Dann ist h endlich étale.

Proof. Seien zunächst f und g total zerlegbar. Die Eigenschaft endlich étale ist lokal auf C und damit insbesondere auf A . Es genügt also für jedes $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ ein $a \in A$ zu finden, sodass $h: C_a \rightarrow B_a$ endlich étale. Damit folgt die Aussage aus 3.19 und 3.16.

Im Allgemeinen seien D_1 und D_2 treuprojektive A -Algebren, sodass $D_1 \rightarrow B \otimes_A D_1$ und $D_2 \rightarrow C \otimes_A D_2$ total zerlegbar sind. Dann ist mit 1.8 und 1.9 auch $A \rightarrow D_2 \rightarrow D_1 \otimes_A D_2$ endlich und projektiv. Da $[D_1 : A] \geq 1$ folgt erneut mit 1.9, dass $[D_1 \otimes_A D_2 : D_2] \geq 1$. Also sind mit 3.9 $\text{Spec } D_1 \otimes_A D_2 \rightarrow \text{Spec } D_2$ und $\text{Spec } D_2 \rightarrow \text{Spec } A$ surjektiv, also auch $\text{Spec } D_1 \otimes_A D_2 \rightarrow \text{Spec } A$. Damit ist $D = D_1 \otimes_A D_2$ treuprojektive A -Algebra.

Da $D_1 \rightarrow B \otimes_A D_1$ total zerlegbar ist und $- \otimes_A D_2$ mit endlichen Produkten kommutiert, ist auch $D = D_1 \otimes_A D_2 \rightarrow B \otimes_A D_1 \otimes_A D_2 = B \otimes_A D$ total zerlegbar. Analog ist $D \rightarrow C \otimes_A D$ total zerlegbar und

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes_A D & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_A D \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & D &
 \end{array}$$

kommutiert, also wendet sich der obige Spezialfall an und $C \otimes_A D \rightarrow B \otimes_A D$ ist endlich étale.

Da $A \rightarrow D$ treuprojektiv, folgt mit 1.9, dass $C \rightarrow C \otimes_A D$ treuprojektiv ist. Anwenden von 3.11 auf $C \otimes_A D \rightarrow B \otimes_A D = B \otimes_C (C \otimes_A D)$, liefert $h: C \rightarrow B$ endlich étale. $\square$

4 Aufgaben nach unserem Kapitel

Satz 4.1 (Aufgabe 5.3). *Sei A ein Ring und B_i A -Algebren für $1 \leq i \leq n$. Sei weiter $B = \prod_{i=1}^n B_i$. Dann ist B genau dann endlich étale, wenn jedes B_i endlich étale ist. In diesem Fall gilt $[B : A] = \sum_{i=1}^n [B_i : A]$.*

Proof. Als A -Modul ist $B \simeq \bigoplus_{i=1}^n B_i$. Also ist B genau dann endlich erzeugt bzw. projektiv, wenn B_i endlich erzeugt bzw. projektiv ist für $1 \leq i \leq n$. Ebenso existiert ein natürlicher A -Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(B, A) = \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^n B_i, A\right) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_A(B_i, A).$$

Das heißt $B \rightarrow \mathrm{Hom}_A(B, A)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $B_i \rightarrow \mathrm{Hom}_A(B_i, A)$ ein Isomorphismus ist für $1 \leq i \leq n$.

Gradformel: Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$. Dann ist

$$[B : A](\mathfrak{p}) = \mathrm{rank}_{A_{\mathfrak{p}}}\left(\bigoplus_{i=1}^n B_i\right)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{rank}_{A_{\mathfrak{p}}}\left(\bigoplus_{i=1}^n (B_i)_{\mathfrak{p}}\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{rank}_{A_{\mathfrak{p}}}(B_i)_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^n [B_i : A](\mathfrak{p}).$$

□

Satz 4.2 (Aufgabe 5.4). *Seien $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ Ringe mit I endlich und sei B_i endlich étale A_i -Algebra für alle $i \in I$. Dann ist $\prod_{i \in I} B_i$ endlich étale $\prod_{i \in I} A_i$ -Algebra. Außerdem ist jede endlich étale $\prod_{i \in I} A_i$ Algebra von dieser Form. Weiter ist*

$$\left[\prod_{i \in I} B_i : \prod_{i \in I} A_i\right] \Big|_{\mathrm{Spec} A_j} = [B_j : A_j].$$

Proof. Die Folge abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccccc} (\prod_{i \in I} A_i)^n & \longrightarrow & (\prod_{i \in I} A_i)^m & \longrightarrow & \prod_{i \in I} B_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow = & & \\ \prod_{i \in I} A_i^n & \longrightarrow & \prod_{i \in I} A_i^m & \longrightarrow & \prod_{i \in I} B_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist genau dann exakt, wenn

$$A_i^n \longrightarrow A_i^m \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $i \in I$. Also ist $\prod_{i \in I} B_i$ genau dann endlich präsentierter $\prod_{i \in I} A_i$ -Modul, wenn B_i endlich präsentierter A_i -Modul ist für alle $i \in I$.

Außerdem ist $\mathrm{Spec} A = \coprod_{i \in I} \mathrm{Spec} A_i$. Also für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$ existiert genau ein $i \in I$, sodass $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A_i$ und $A_{\mathfrak{p}} = (A_i)_{\mathfrak{p}}$ und $B_{\mathfrak{p}} = (B_i)_{\mathfrak{p}}$. Also ist $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ genau dann frei separabel für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$, wenn $(A_i)_{\mathfrak{p}} \rightarrow (B_i)_{\mathfrak{p}}$ frei separabel ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A_i$ und alle $i \in I$.

Insgesamt ist $A \rightarrow B$ genau dann endlich étale, wenn $A_i \rightarrow B_i$ endlich étale ist für alle $i \in I$.

Sei nun $f: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow B$ endlich étale. Es ist $\mathrm{Spec} A = \coprod_{i \in I} \mathrm{Spec} A_i$. Nach 3.12 existieren also idempotente Elemente $e_i \in A$, sodass $\mathrm{Spec} A = \coprod_{i \in I} D(e_i)$. Nach 2.3 ist $\mathrm{Spec} B = \coprod_{i \in I} D(f(e_i))$. Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \prod_{i \in I} B_{e_i} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & \prod_{i \in I} A_{e_i} \end{array}.$$

Nach 3.13 sind die horizontalen Pfeile Isomorphismen und wir sind in der obigen Situation.

Die Gradformel folgt aus $\operatorname{Spec} A = \coprod_{i \in I} \operatorname{Spec} A_i$ und durch Berechnung in der Überdeckung aus dem ersten Absatz. $\square$