Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: W ist ein Untervektorraum von V.

Beweis. $0 \in W$, da $0(n) + 0(n+1) + 0(n+2) = 0$
Seien $w_1, w_2 \in W, a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned}&(aw_1 + w_2)(n) + (aw_1 + w_2)(n+1) + (aw_1 + w_2)(n+2) \\ &= a(\underbrace{w_1(n) + w_1(n+1) + w_1(n+2)}_{=0}) + \underbrace{w_2(n) + w_2(n+1) + w_2(n+2)}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\implies (aw_1 + w_2) \in W$ □

(b) Beh.: Sind $f, g \in W$ derart, dass $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$ gelten, so ist $f = g$.

Beweis. Seien $f, g \in W$ mit $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$.
Zz.: $\forall n \in \mathbb{N}\colon f(n) = g(n)$
Beweis durch vollständige Induktion

I.A.: Nach Voraussetzung gilt $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$.

I.S.: Es existiere ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ mit $f(n) = g(n)$ und $f(n-1) = g(n-1)$.

$n \to n+1$: Wegen $f, g \in W$ gilt:

$$f(n-1) + f(n) + f(n+1) = 0 = g(n-1) + g(n) + g(n+1).$$

$\overset{I.V.}{\implies} f(n+1) = g(n+1).$ □

(c) Beh.: W ist endlich erzeugt.

Beweis. Definiere:

$$w_1 := \begin{cases} 1 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+1 \\ 0 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+2 \\ -1 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k \end{cases}, \qquad w_2 \colon = \begin{cases} 0 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+1 \\ 1 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+2 \\ -1 & \exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k \end{cases}.$$

Zz.: $w_1, w_2 \in W$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Falls $\exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+1$, dann $n+1 = 3k+2$ und $n+2 = 3(k+1)$.

$$w_1(n) + w_1(n+1) + w_1(n+2) = 1 + 0 - 1 = 0$$

und

$$w_2(n) + w_2(n+1) + w_2(n+2) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Fälle $\exists k \in \mathbb{N}_0\colon n = 3k+2$ bzw. $n = 3k$ folgen analog.

Zz.: $\{w_1, w_2\}$ ist Erzeugendensystem. Sei $f \in W$ beliebig. Wähle $a_1 := f(1)$ und $a_2 := f(2)$. Damit gilt:

$$a_1 w_1(1) + a_2 w_2(1) = a_1 = f(1)$$

und

$$a_1 w_1(2) + a_2 w_2(2) = a_2 = f(2).$$

Wegen (b) $\implies f = a_1 w_1 + a_2 w_2$.
$\implies \{w_1, w_2\}$ ist endliches Erzeugendensystem von W. □

(d) Beh.: $\dim(W) = 2$

Beweis. Zz.: $\{w_1, w_2\}$ aus (c) ist Basis, also linear unabhängig.

Sei $a_1 w_1(n) + a_2 w_2(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 1$ folgt $a_1 w_1(1) + a_2 w_2(1) = a_1 = 0$.
Für $n = 2$ folgt $a_1 w_1(2) + a_2 w_2(2) = a_2 = 0$.

$\implies \{w_1, w_2\}$ linear unabhängig und wegen (c) Basis von $W \implies \dim(W) = 2$ □

Aufgabe 2. (c) Beh.: (u, v, x) ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot (0, 1, 2) + b \cdot (2, 1, 0) + c \cdot (1, 0, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} 2a = 0 &\implies a = 0 \\ a + b = 0 &\implies b = 0 \\ 2b + c = 0 &\implies c = 0. \end{aligned}$$

$\implies (u, v, x)$ linear unabhängig.

Sei $z \in \mathbb{R}^3$ mit (z_1, z_2, z_3) beliebig. Dann wähle $a = \frac{z_3}{2}$, $b = z_2 - \frac{z_3}{2}$ und $c = z_1 - 2z_2 + z_3$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{z_3}{2} \cdot (0, 1, 2) + \left(z_2 - \frac{z_3}{2}\right) \cdot (2, 1, 0) + (z_1 - 2z_2 + z_3) \cdot (1, 0, 0) \\ &= \left(2z_2 - z_3 + z_1 - 2z_2 + z_3, \frac{z_3}{2} + z_2 - \frac{z_3}{2}, z_3\right) \\ &= (z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

$\implies (u, v, x)$ ist Erzeugendensystem. $\implies (u, v, x)$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$. □

(a) Beh.: (u, v) ist linear unabhängig, aber keine Basis.

Beweis. (u, v) ist ein Teilsystem von (u, v, x) und damit wegen (c) ebenfalls linear unabhängig,

Da (u, v, x) linear unabhängig ist, ist (u, v) nicht maximal, also keine Basis und damit kein Erzeugendensystem. □

(b) Beh.: (u, v, w) ist weder linear unabhängig, noch Erzeugendensystem.

Beweis. Wähle $a := \frac{1}{2}$, $b := \frac{1}{2}$ und $c := -1$. Damit folgt

$$au + bv + cw = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - w = \frac{1}{2}(0, 1, 2) + \frac{1}{2}(2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Aber $a = \frac{1}{2} \neq 0 \implies (u, v, w)$ nicht linear unabhängig.

Da $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, trägt w nicht zu $\mathrm{Lin}((u, v, w))$ bei. Weil (u, v) wegen (a) kein Erzeugendensystem ist, ist (u, v, w) ebenfalls kein Erzeugendensystem und damit keine Basis. □

(d) Beh.: (u, v, w, x) ist Erzeugendensystem, aber nicht linear unabhängig und damit keine Basis.

Beweis. Da die Basis (u, v, x) ein Teilsystem von (u, v, w, x) ist, folgt, dass (u, v, w, x) Erzeugendensystem ist.

Allerdings ist dieses nicht minimal, da (u, v, x) Basis ist. Also ist (u, v, w, x) keine Basis und damit nicht linear unabhängig. □

Aufgabe 3. (a) Beh.: $\mathrm{Rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g))$

Beweis. Zz.: $\mathrm{Rg}(g \circ f) \leq \mathrm{Rg}(f)$.

Schränke g ein durch $g' : \mathrm{Bild}(f) \to \mathrm{Bild}(g \circ f)$, $v \mapsto g(v)$
$\implies g' \circ f(u) = g \circ f(u) \quad \forall u \in U$
$\implies \mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) \geq \dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) = \mathrm{Rg}(g \circ f)$

Zz.: $\mathrm{Rg}(g \circ f) \leq \mathrm{Rg}(g)$.

Wegen $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subset \mathrm{Bild}(g)$ und f und g linear, folgt $\mathrm{Bild}(g \circ f)$ ist UVR von $\mathrm{Bild}(g)$.
$\implies \mathrm{Rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Bild}(g)) = \mathrm{Rg}(g)$ □

(b) Für $U = V = W = \mathbb{R}^2$ und

$$f\colon (x, y) \mapsto (x, 0), \qquad g\colon (x, y) \mapsto (0, y).$$

g und f sind linear. $\implies g \circ f\colon (x, y) \mapsto (0, 0)$.
Wegen $\mathrm{Rg}(f) = 1 = \mathrm{Rg}(g)$, aber $\mathrm{Rg}(g \circ f) = 0$ folgt:

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) = 0 < 1 = \min\left(\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g)\right).$$

(c) Für $U = V = W$ und $f = g = id$ folgt $g \circ f = id \circ id = id$. id auf Vektorräumen ist linear. Also $f = g = g \circ f$, also $\mathrm{Rg}(g \circ f) = \mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(f)$.

Aufgabe 4. (a) Beh.: Ist $f^*\colon V^* \to U^*$ injektiv, so ist f surjektiv.

Beweis. Kontraposition. Zz.: Ist f nicht surjektiv, dann ist f^* nicht injektiv.

Sei $(v_i)_{i \in I}$ Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Wegen Basisergänzungssatz und f nicht surjektiv, ex. eine Indexmenge $J \neq \emptyset$ mit $J \cap I = \emptyset$, s.d. $(v_i)_{i \in I \cup J}$ Basis von V.

$\implies v_j \notin \mathrm{Bild}(f) \quad \forall j \in J$

Nun wähle $j_0 \in J$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ mit $\varphi_1(v_{j_0}) \neq \varphi_2(v_{j_0})$ und $\varphi_1(v_i) = \varphi_2(v_i) \quad \forall i \in I$

$\implies \varphi_1(f(u)) = \varphi_2(f(u)) \quad \forall u \in U$.
Aber $\varphi_1(v_{j_0}) \neq \varphi_2(v_{j_0}) \implies \varphi_1 \neq \varphi_2$.
$\implies f^*$ nicht injektiv. □

(b) Beh.: f injektiv $\iff f^*$ surjektiv

Beweis. (i) Zz.: f injektiv $\implies f^*$ surjektiv
Sei $u^* \in U^*$ beliebig und $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U. Wegen f injektiv folgt:

$$(f(u_i))_{i \in I} = (v_i)_{i \in I} \quad \text{linear unabhängig.}$$

Wegen Basisergänzungssatz, sei J Indexmenge mit $I \cap J = \emptyset$ und $(v_i)_{i \in I \cup J}$ Basis von V.
Nun definiere $\varphi \in V^*$ für $(v_i)_{i \in I \cup J}$ mit:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} u^*(u_i) & i \in I \\ 0 & i \in J \end{cases}.$$

φ ist damit durch Basisvektoren eindeutig bestimmt.
Außerdem gilt $\forall u_i \in (u_i)_{i \in I}\colon u^*(u_i) = \varphi(f(u_i))$. Wegen $(u_i)_{i \in I}$ Basis von U, folgt: $\forall u \in U$ $u^*(u) = \varphi(f(u)$. $\implies f^*(\varphi) = u^*$.
$\implies f^*$ surjektiv.

(ii) Zz.: f^* surjektiv $\implies f$ injektiv.
Angenommen: f nicht injektiv. Dann ex. $u_1, u_2 \in U$ mit $f(u_1) = f(u_2)$, aber $u_1 \neq u_2$.
Wähle $u^* \in U^*$, s.d. $u^*(u_1) \neq u^*(u_2)$. Wegen f^* surjektiv, ex. $\varphi \in V^*\colon \varphi(f(u)) = u^*(u)$ $\forall u \in U$. Damit:

$$u^*(u_1) = \varphi(f(u_1)) = \varphi(f(u_2)) = u^*(u_2).$$

Widerspruch zu $u^*(u_1) \neq u^*(u_2)$.
$\implies f$ injektiv.

□