

Aufgabe	A1	A2	A3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1. a) Beh.:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

ist eine Norm auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

Beweis. Seien $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

(N1) Es ist $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq 0$. Außerdem ist

$$\|f\|_{\infty} = 0 \implies \max_{x \in [0,1]} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} = 0 \implies f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \implies f = 0 \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

(N2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\|\alpha f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |\alpha f(x)| = \max_{x \in [0,1]} \underbrace{|\alpha|}_{\geq 0} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} = |\alpha| \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_{\infty}.$$

(N3) Es ist

$$\|f+g\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} \left(\underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} + \underbrace{|g(x)|}_{\geq 0} \right) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |g(x)| = \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}.$$

□

b) Beh.:

$$\|f\|_1 = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

ist eine Norm auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

Beweis. Seien $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

(N1) Es ist $\|f\|_1 = \int_0^1 \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} dx \geq 0$. Außerdem ist wegen der Monotonie des R.-Integrals:

$$\|f\|_1 = 0 \implies \int_0^1 \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} dx = 0 \implies f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \implies f = 0 \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

(N2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann folgt mit der Linearität des R.-Integrals

$$\|\alpha f\|_1 = \int_0^1 |\alpha f(x)| dx = \int_0^1 |\alpha| |f(x)| dx = |\alpha| \int_0^1 |f(x)| dx = |\alpha| \|f\|_1.$$

(N3) Es ist

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

□

c) Für die gegebene Funktionenfolge gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$\|u_k\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |u_k(x)| = \max_{x \in [x_{k+1}, x_k]} \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}}\pi\right) = 1.$$

Für die 1-Norm folgt

$$\begin{aligned}\|u_k\|_1 &= \int_0^1 u_k(x) dx \\ &= \int_{x_{k+1}}^{x_k} \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}}\pi\right) dx \\ &= \left[\frac{x_k - x_{k+1}}{\pi} \cos\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}}\pi\right) \right] \Big|_{x_{k+1}}^{x_k} \\ &= 2 \frac{x_k - x_{k+1}}{\pi}\end{aligned}$$

Mit $x_k = \frac{1}{k}$ folgt

$$\begin{aligned}\|u_k\|_1 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k^2 + k} \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Beh.: $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind nicht äquivalent.

Beweis. Ang.: $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ seien äquivalent, dann existiert ein $m \in \mathbb{R}$, s.d. $\forall f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ gilt

$$m\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \text{also insbes.} \quad m\|u_k\|_\infty \leq \|u_k\|_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\|u_k\|_\infty = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, folgt also

$$m \leq \|u_k\|_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \not\rightarrow \text{ zu } \|u_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent. □

Aufgabe 2. (i) Beh.: $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

$$(N1) \text{ Es ist } \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n \underbrace{|a_{ij}|^2}_{\geq 0} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0. \text{ Außerdem gilt}$$

$$\|A\|_F = 0 \implies \left(\sum_{i,j=1}^n \underbrace{|a_{ij}|^2}_{\geq 0} \right)^{\frac{1}{2}} \implies a_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \implies A = 0.$$

(N2) Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann ist

$$\|\alpha A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |\alpha a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha|^2 \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|A\|_F.$$

(N3) Sei $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Durch Identifikation von Matrizen aus $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit der Frobeniusnorm und Vektoren aus $\mathbb{K}^{n \cdot n}$ mit der Euklidischen Norm, gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Dann

folgt

$$\begin{aligned}
 \|A + B\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}|^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2| \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}b_{ij}| + \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \\
 &\stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \|A\|_F^2 + 2\|A\|_F\|B\|_F + \|B\|_F^2 \\
 &= (\|A\|_F + \|B\|_F)^2.
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

□

(ii) Beh.: $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}, x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2.$$

Beweis. Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig. A_i bezeichne die i -te Zeile der Matrix A . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (A_i, x)_2^2 \\
 &\stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \|x\|_2^2 \\
 &= \|x\|_2^2 \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \\
 &= \|x\|_2^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \\
 &= \|x\|_2^2 \|A\|_F^2.
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

□

(iii) Beh.: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

Beweis. Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig. A_i bezeichne die i -te Zeile der Matrix A , B_j die j -te Spalte (!) der Matrix B . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right|^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (A_i, B_j)_2^2 \\
 &\stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \|A_i\|_2^2 \|B_j\|_2^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \sum_{j=1}^n \|B_j\|_2^2 \\
 &= \|A\|_F \|B\|_F.
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. a) Auszug aus *rohrleitungsnetzwerk.cc*

```

1 // Funktion zum Aufstellen der Matrix
2 template<class NumberType>
3 void flussMatrix( hdnun::DenseMatrix<NumberType> &A ) {
4     int M( A.rowsize() );
5     int N( A.colsize() );
6     if(M!=N)
7         HDNUM_ERROR("Matrix muss quadratisch sein!");
8
9     // Numerierung wie auf Zettel 3 nur mit 0 beginnend
10    // also v_0, ..., v_(N^2-1)
11    // der Referenzknoten v_r hat Druck 0
12
13    // berechnung der kantenlaenge
14    int n = floor(sqrt(N+1));
15
16    for(int i = 0; i < N; i++) {
17        int edges = 0;
18        if ((i+1)%n != 0) { // nicht linker rand
19            edges++;
20            if (i-1 >= 0) A(i, i-1) = -1; // falls nicht der referenzknoten
21        }
22        if ((i+2)%n != 0) { // nicht rechter rand
23            edges++;
24            A(i, i+1) = -1;
25        }
26        if (i+n < N) { // nicht unterer rand
27            edges++;
28            A(i, i+n) = -1;
29        }
30        if (i-n >= -1) { // nicht oberer rand
31            edges++;
32            if (i-n >= 0) A(i, i-n) = -1; // falls nicht der referenzknoten
33        }
34        A(i, i) = edges;
35    }
36 }

```

Funktion zum Aufstellen der Matrix

b) In *DenseMatrix* sind schon die Zeilen- und Spaltensummennorm definiert. Auszug aus *rohrleitungsnetzwerk.cc*

```

1 // Funktion zur Berechnung der Frobenius-Norm einer Matrix
2 template<class NumberType>
3 NumberType frobeniusNorm(const hdnun::DenseMatrix<NumberType> &A) {
4     // Error checking
5     int M(A.rowsize());
6     int N(A.colsize());
7     if(M!=N)
8         HDNUM_ERROR("Matrix muss quadratisch sein!");
9
10    NumberType result=0.0;
11
12    // iteriere ueber alle zeilen und spalten, quadriere die elemente und
13    // summiere
14    for (int i=0; i < N; i++) {
15        for (int j=0; j < N; j++) {
16            result += pow(A(i,j), 2);
17        }
18    }
19
20    // ziehe wurzel aus summe
21    return sqrt(result);
22 }

```

Frobeniusnorm

c) Auszug aus *rohrleitungsnetzwerk.cc*

```

1 // Funktion zur Berechnung des betragsgr ten Eigenwertes mit Potenzmethode
2 template<class NumberType>
3 NumberType maxEigenwert(const hdnun::DenseMatrix<NumberType> &A) {
4     // Error checking
5     int M(A.rowsize());

```

```
6     int N(A.colsize());
7     if(M!=N)
8         HDNUM_ERROR("Matrix muss quadratisch sein!");
9
10    // start vektor
11    hdnnum::Vector<NumberType> r(N);
12    r[0] = 1;
13    // work copy
14    hdnnum::Vector<NumberType> r_tmp(N);
15    hdnnum::Vector<NumberType> diff(N);
16    // fuehre iterationsschritt 10000 mal aus
17    for (int k=0; k<10000; k++) {
18        A.mv(r_tmp, r); // r_tmp = Ar
19        r_tmp /= r_tmp.two_norm(); // normiere r_tmp
20        r = r_tmp;
21    }
22    A.mv(r_tmp, r);
23    // berechne eigenwert mit rayleigh quotient
24    return (r * r_tmp)/r.two_norm_2();
25 }
```

Eigenwertberechnung