Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. a) Mit der Block LU-Zerlegung von A folgt

$$A = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}A_{11}A_{11}^{-1} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \implies S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

b) Sei A hermitesch und positiv definit. Dann ist

$$\overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{A_{11}}^T & \overline{A_{21}}^T \\ \overline{A_{12}}^T & \overline{A_{22}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Damit folgt $\overline{A_{11}}^T = A_{11}$ und $\overline{A_{12}}^T = A_{21}$. Dann folgt

$$\overline{S}^T = \overline{A_{22}}^T - \overline{A_{12}}^T \overline{A_{11}}^{-T} \overline{A_{21}}^T = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = S.$$

Also S und A_{11} hermitesch. Da A hermitesch und positiv definit, sind alle führenden Hauptminoren positiv, d.h. auch alle führenden Hauptminoren von A_{11} sind positiv, d.h. A_{11} positiv definit.

Aufgabe 2. Beh.: Der Algorithmus ist wie angegeben durchführbar.

Beweis. Induktionsbehauptung: $\forall 1 \leq j < n$: $u_j \neq 0$ und $|u_j| > |b_j|$. Endliche Induktion über $j < n$. $j = 1$: $u_1 = a_1 \neq 0$. $|u_1| > |b_1|$.

Sei $j < n$ und Induktionsbehauptung für $j-1$ gezeigt. Dann gilt $u_{j-1} \neq 0$, also $l_j = \frac{c_j}{u_{j-1}}$ und $u_j = a_j - \frac{c_j}{u_{j-1}} b_{j-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |u_j| &= \left| a_j - \frac{c_j}{u_{j-1}} b_{j-1} \right| \\ &\geq \left| |a_j| - \frac{|c_j|}{|u_{j-1}|} |b_{j-1}| \right| \\ &\geq \left| |b_j| + \underbrace{|c_j|}_{\neq 0} \left(1 - \underbrace{\frac{|b_{j-1}|}{|u_{j-1}|}}_{\text{I.V.:}<1} \right) \right| \\ &> |b_j| > 0. \end{aligned}$$

Das zeigt die Induktionsbehauptung.

Für $j = n$ folgt ganz analog

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| a_n - \frac{c_n}{u_{n-1}} b_{n-1} \right| \\ &\geq \left| |c_n| \left(1 - \underbrace{\frac{|b_{n-1}|}{|u_{n-1}|}}_{<1} \right) \right| \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Beh.: Der Algorithmus liefert die angegebene LU-Zerlegung.

Beweis. Es müssen je Zeile nur die c_j eliminiert werden. Das wird mit $l_j = c_j/u_{j-1}$ erreicht. Da $b_j \neq 0$, wird noch die Diagonale modifiziert um $-l_j b_{j-1}$. Die b_j werden nicht verändert, da die Elemente in A oberhalb der b_j null sind. Damit folgt die angegebene LU-Zerlegung. □

Beh.: $\det(A) \neq 0$.

Beweis. Es ist $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot \underbrace{u_1 \cdots u_n}_{\neq 0} \neq 0$ □

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & i = j \lor j = n \\ -1 & i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Es gilt nach VL für $1 \leq k < n$:

$$l_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq k \\ a_{ik}/a_{kk} & k < i \leq n \end{cases}.$$

Für $1 \leq i < n$ gilt: Wegen $a_{ij} = 0$ für $j > i$, werden die Pivotelemenete $a_{ii} = 1$ nicht modifiziert. Damit folgt

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ +1 & i = j \\ -1 & i > j \end{cases},$$

also $|l_{ij}| \leq 1$. Da $l_{ij} = -1$ für $i > j$, gilt für $i > k$:

$$a_{in}^{(k)} = a_{in}^{(k-1)} - (-1) \cdot a_{kn}^{(k)}.$$

Damit folgt

$$u_{in}^{(k)} = \begin{cases} u_{in}^{(k-1)} & 1 \leq i \leq k \\ u_{in}^{(k-1)} + u_{kn}^{(k)} & k+1 \leq i \leq n \end{cases} = \begin{cases} u_{in}^{(k-1)} & 1 \leq i \leq k \\ 2u_{in}^{(k-1)} & k+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Insgesamt folgt

$$u_{nn} = u_{nn}^{(n-1)} = 2u_{nn}^{(n-2)} = \ldots = 2^{n-1} u_{nn}^{(1)} = 2^{n-1}.$$

b) Verwende Spaltenvertauschungen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, j-te Spalte von Q gegeben als

$$Q_j = \begin{cases} e_n & j = 1 \\ e_{j-1} & 1 < j \leq n \end{cases}.$$

Dann hat AQ die Form

$$(AQ)_{ij} = \begin{cases} +1 & j = 1 \lor i+1 = j \\ -1 & j \neq 1 \land j < i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Induktion über n. Für $n = 2$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies AQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=:U}.$$

Es gilt also $u_{nn} = -2$, insbes. $|u_{nn}| = 2 = \max\{|1|, |-2|\}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und Beh. gezeigt für $n-1$. Dann ist

$$AQ = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wende Operationen der Gauß-Elimination von $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ auf AQ an Für $1 \le i \le n-2$ gilt $a_{in} = 0$, also bleibt n-te Spalte unverändert. Letzte Zeile zu 0 eliminiert, bis auf $a_{n(n-1} = -1$. Nach I.V. gilt jetzt $a'_{(n-1)(n-1)} = -2$. Mit $l = 1$ folgt

$$u_{nn} = a'_{nn} = a_{nn} - a_{(n-1)n} = -1 - 1 = -2.$$

Es ist weiter

$$u_{ni} = a_{ni} = \begin{cases} 0 & 1 \le i < n-1 \\ 1 & i = n-1 \\ -2 & i = n \end{cases}.$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 4. siehe *prog_iterative_solvers.cc* und *iterative_solvers_plot.png*.