

Seien im Folgenden S und S' zwei Koordinatensysteme, wobei sich S' relativ zu S mit Geschwindigkeit v bewege, sodass zum Zeitpunkt $ct = ct' = 0$ auch $x = x' = 0$ gelte. Das Ereignis A liege im gemeinsamen Ursprung von S und S' .

D.7 Geometrischer Vergleich zwischen Lorentz-Transformationen und Rotationen

Rotationen (links) und Lorentz-Transformationen (rechts) erzeugen deutlich verschiedene Geometrien.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Das fehlende Minuszeichen in den Lorentz-Transformationen, führt dazu, dass die Achsen für positive Rapidität zueinander geschert werden und die hyperbolischen Funktionen dazu, dass die Linien von gleichem s^2 , also die Linien, auf denen die Lorentzinvariante $s^2 = (ct)^2 - x^2$ konstant ist, hyperbelförmig sind, im Gegensatz zu den kreisförmigen Linien gleichen Radius bei Rotationen.

D.8 Kausale Struktur der Raumzeit

Die Raumzeit ist durch eine ausgezeichnete Linie getrennt. Diese erfüllt die Gleichung $x = ct$. Hier ist $s^2 = 0$ und Ereignisse auf dieser Linie werden **lichtartig** genannt. Lichtsignale, die im Ursprung eines Koordinatensystems losgeschickt werden, verlaufen auf dieser (Null-)Linie.

Die Nulllinie trennt Ereignisse in der Raumzeit in zwei Gruppen: Die **zeitartig** getrennten, mit $s^2 > 0$ und die **raumartig** getrennten mit $s^2 < 0$. Der Bereich der Raumzeit, wo $s^2 > 0$ gilt, wird auch **Lichtkegel** genannt. Innerhalb des Lichtkegels liegt eine absolute zeitliche Ordnung der Ereignisse vor: Ein Ereignis B , das in S nach A stattfindet, findet auch in S' nach A statt. Außerhalb des Lichtkegels, also für raumartig getrennte Ereignisse gilt das nicht: Es kann v immer so gewählt werden, dass B unterhalb der x' -Achse liegt. Dann findet B in S' vor A statt.

Außerdem kann A nur zeitartigen Ereignissen B Lichtsignale senden, da dort das Lichtsignal ankommt, bevor B stattfindet. Bei raumartigen Ereignissen C kann jedoch ein Lichtsignal von A nicht ankommen, da wenn das Lichtsignal die räumlichen Koordinaten von C erreicht hat, B schon passiert ist.

D.9 Relativistische Effekte

- Relativität der Gleichzeitigkeit: Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, ist keine zeitliche Ordnung der Ereignisse außerhalb des Lichtkegels gegeben.
- Zeitdilatation: Eine in S' ruhende Uhr, scheint von S aus betrachtet langsamer zu gehen. Genauer: $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Dieser Effekt ist symmetrisch und wird von der Transformation erzeugt.
- Längenkontraktion: Längenmaßstäbe in einem bewegten System erscheinen verkürzt. Genauer: $\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'$. Auch dieser Effekt ist symmetrisch und wird nur durch die Transformation erzeugt.

D.10 Eigenzeit

Sei eine Trajektorie $x^\mu(\tau)$ durch ein Koordinatensystem gegeben. Die Uhr eines Insassen eines Raumschiffes, das sich auf dieser Trajektorie bewegt, zeigt die sogenannte **Eigenzeit** τ des Systems an. Die Tangente $u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ gibt die Geschwindigkeit des Teilchens auf der Trajektorie an.

Durch Berechnung der Lorentz-Invariante s^2 erhalten wir $s^2 = (c\tau)^2$ im Ruhesystem des Teilchens. Da dieser Zusammenhang auch infinitesimal gilt, folgt insgesamt für die vom Ereignis A zum Ereignis B vergangene Eigenzeit

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_A^B \frac{dt}{\gamma}$$

für Start- und Endpunkte A und B .