Funktheo Blatt 6

**A1** (a) $D \subseteq \mathbb{C}$ Sterngebiet, $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ harmonisch

Beh.: $u$ hat eine harmon. Konjugierte auf $D$.

Bew.: Setze $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. Dann ist $g$ total reell diff'bar,

da $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ und es gilt $\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

und $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \underset{u \in C^2}{\overset{\text{Schwarz}}{=}} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, also Cauchy-Riemann ist erfüllt.

Also ist $g$ holomorph auf Sterngebiet $D$. Also ex. ein $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f$ holomorph und $f' = g$. Dann ist $f$ harmon. konj. zu $u$, denn für $\tilde{f} = u + iv$ holomorph ist $\tilde{f}'(z) \overset{VL}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) \overset{C-R}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z) = f'(z)$. Also folgt $f = u + iv$ für ein $v \in C^2(D, \mathbb{R})$. $\square$

b) Bew.: Sei $z_0 \in D$ bel.. Da $D$ offen ex. ein $\varepsilon > 0$ s.d. $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$. Da $U_\varepsilon(z_0)$ Sterngebiet ex. nach (a) ein $v \in C^2(U_\varepsilon(z_0), \mathbb{R})$ mit $f = u + iv$ holomorph auf $U_\varepsilon(z_0)$.

Dann ist $f$ in $z_0$ bel. oft kompl. diff'bar, d.h. $f$ als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in $z_0$ bel. oft (total) reell diff'bar., insbes. bel. oft part. diff'bar, also $u \in C^\infty(D, \mathbb{R}^2)$. $\square$

c) Bew.: Für $0 < r < s$ ist $\overline{U_r(P)} \subseteq U_s(P)$. Sei außerdem $f = u + iv$ holomorph auf $U_s(P)$. Dann gilt nach Cauchy:

$$f(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - P}\, dw \quad \text{wobei } \gamma(t) := P + re^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(w) + iv(w)}{w - P}\, dw$$

$$\overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(P + re^{i\theta}) + iv(P + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(P + re^{i\theta}) + iv(P + re^{i\theta})\, d\theta$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(P + re^{i\theta})\, d\theta}_{\in \mathbb{R}} + \frac{i}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} v(P + re^{i\theta})\, d\theta}_{\in \mathbb{R}}$$

also folgt $u(P) = \operatorname{Re} f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(P + re^{i\theta})\, d\theta$. $\square$

A2 (a) Bew. Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\varepsilon > 0$ und $w \in \mathbb{C}$. Falls $\exists z \in \mathbb{C}: f(z) = w$, fertig.

Sei also $f(z) - w \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist $z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$ holomorphe ganze Funktion und wegen $f$ nicht konstant, selber nicht konstant. Also nach Liouville nicht beschränkt. D.h. es ex. ein $z \in \mathbb{C}$ sd. $\left| \frac{1}{f(z)-w} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Damit $|f(z) - w| < \varepsilon$.

$\square$

(b) Bew. Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ nicht konstant und $w \in \mathbb{C}$ bel. Dann ist $P - w \in \mathbb{C}[X]$ nicht konstant, hat also nach Fundsatz eine NS $z \in \mathbb{C}$, also $P(z) = w$.

$\square$

(c) Bew. Setze $p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$.

Nun gilt für $w \in \mathbb{C}$ bel.: Setze $r := 2|w|$. Dann ist $w \in U_r(0)$ und $f|_{U_r(0)} : U_r(0) \to \mathbb{C}$ holom. Dann gilt nach Potenzreihenentwicklungssatz $f(w) = p(w)$. Das zeigt Konvergenzradius $\infty$ und $f = p$.

$\square$

(d) Bew. Sei $m > n$ bel. Zz: $f^{(m)}(0) = 0$, denn dann geht die Potenzreihe aus (c) in ein Polynom von Grad $\leq n$ über und die Beh. folgt.

Also zz $f^{(m)}(0) = 0$. Nun sei $r > R$ bel. Dann ist $\forall z \in U_r(0) \setminus U_R(0)$:
$|f(z)| \leq |M z^n| < M r^n$. Außerdem ist $\overline{U_R(0)}$ kompakt, also die stetige Funktion $f$ beschränkt, also ex. ein $S \in \mathbb{R}$ sd. $|f(z)| \leq S \ \forall z \in \overline{U_R(0)}$.
OE sei nun $r$ hinreichend groß, sd. $M r^n > S$. Dann gilt also $|f(z)| < M r^n$ $\forall z \in U_r(0)$. Dann gilt nach Cauchy'scher Ungleichung:

$$|f^{(m)}(0)| \leq \frac{M r^n m!}{r^m} = M m! \, r^{n-m}.$$

Da $m > n$ folgt für $r \to \infty$ die Beh.

$\square$

**A3** (a) Es ist $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}$.

Damit folgt $\int_{\gamma_j} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz = \frac{i}{2}\int_{\gamma_j}\frac{e^z}{z+i}\,dz - \frac{i}{2}\int_{\gamma_j}\frac{e^z}{z-i}\,dz$

Außerdem ist $z \mapsto e^z$ ganz und $\gamma_j$ geschlossen $\forall j$.

(i) CIF: $e^i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z-i}\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z-i}\,dz = 2\pi i e^i$

Es ist für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $-i \notin U_{1+\varepsilon}(i)$. Dann ist $\frac{e^z}{z+i}$ holom. auf dem Sterngebiet $U_{1+\varepsilon}(i)$ und nach Cauchy verschwindet $\int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z+i}\,dz$.

Also folgt $\int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^2+1}\,dz = -\frac{i}{2}2\pi i e^i = \pi e^i$

#

(ii) CIF: $e^{-i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z+i}\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z+i}\,dz = 2\pi i e^{-i}$

Analog zu (i) verschwindet nun $\int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z-i}\,dz$, also folgt $\int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z^2+1}\,dz = \frac{i}{2}2\pi i e^{-i} = -\pi e^{-i}$

#

(iii) Es ist $i, -i \in U_3(0)$, d.h. CIF liefert wie in (i) und (ii)

$\int_{\gamma_3}\frac{e^z}{z-i}\,dz = 2\pi i e^i$ und $\int_{\gamma_3}\frac{e^z}{z+i} = 2\pi i e^{-i}$

Also insgesamt: $\int_{\gamma_3}\frac{e^z}{z^2+1}\,dz = \frac{i}{2}2\pi i e^{-i} - \frac{i}{2}2\pi i e^{+i} = -\pi e^{-i} + \pi e^i$

$= \pi(e^i - e^{-i})$

$= 2\pi i \sin(1)$

$\square$

(b) Es ist $\sin(z) \overset{VL}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Damit folgt: $\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Es ist $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ als Potenzreihe holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit $P(0) = 1$ und $P(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Nun setze: $f: U_\pi(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\cos(z)}{P(z)}$.

Da $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ gilt $\sin(z) = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \overset{VL}{\iff} z = \pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Also ist $P(z) \neq 0$ $\forall z \in U_\pi(0)$ da $\pi, -\pi \notin U_\pi(0)$, $P(0) = 1$ und für $z \neq 0$: $P(z) = 0 \Rightarrow \sin(z) = 0$.

Damit ist $f$ als Quotient holomorpher Funktionen holomorph. Also folgt da $3 < \pi$:

$$1 = \frac{\cos(0)}{P(0)} = f(0) \overset{CIF}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_3(0)} \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_3(0)} \frac{\cos(z)}{z\, P(z)} \underset{0 \notin \partial U_3(0)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_3(0)} \frac{\cos(z)\, z}{z \sin(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_3(0)} \cot(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \int_{\partial U_3(0)} \cot(z)\, dz = 2\pi i$$

$\square$