Funktheo Blatt 8 Christian Merten, Julia Fila

A1	A2	Σ

A1 (a) (i) Bew: $\forall n \in \mathbb{N}$: $|z_n| = \left|1 - \frac{1}{\pi n}\right| \overset{\frac{1}{\pi n} < 1}{=} 1 - \frac{1}{\pi n} < 1$.

Es gilt außerdem $1 - \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ also ist $1 \in \mathbb{C}$ HP.

$$f(z_n) = \sin\left(\frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{\pi n}}\right) = \sin(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

(ii) Da $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. ist 1 einziger HP, aber $1 \notin \mathbb{E}$ also hat (z_n) keinen HP in $\mathbb{E}$.

$\square$

(b) (i) Beh: Nein

Bew: Ang es ex. ein solches f_1. Es ist $f: \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto -z$ holomorph.

Betrachte $z_n := \frac{1}{2n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $z_n \longrightarrow 0 \in \mathbb{E}$ und

$f_1(z_n) = -z_n = f(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Also folgt nach Identitätssatz für holom. Fkt $f_1 = f$, aber $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\square$

(ii) Beh: Ja

Bew: $f_2: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{z^2}{1-z^2}$. Es sind ± 1 NS von $1-z^2$.

Da $\deg(1-z^2) = 2$ sind dies alle NS, also f_2 auf $\mathbb{E}$ holomorph.

Außerdem gilt $f_2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^2}{1 - 1/n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{n^2-1}$ $\forall n \geq 2$.

$\square$

(iii) Beh: Nein

Bew: Ang. f_3 auf $\mathbb{E}$ holomorph mit $|f_3^{(n)}(0)| \geq (n!)^2$. Dann ist f_3 in 0 als Potenzreihe entwickelbar, d.h. $\forall z \in \mathbb{E} = U_1(0)$ ist:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Insbes. gilt für $0 < r < 1$ bel., dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ auf $\overline{U_r(0)}$ absolut konv., d.h. für $z = r$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n\right| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(n!)^2}{n!} r^n\right| \geq \sum_{n=0}^{\infty} r^n n!$$

Also konv. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n n!$, aber Quotientenkriterium liefert

$$\left|\frac{r^{n+1}(n+1)!}{r^n n!}\right| = r(n+1) \xrightarrow{n \to \infty} \infty. \quad \lightning$$

$\square$

A2) Bew. Da g keine NS auf $\overline{D}$ ist $\forall z \in \overline{D}$: $g(z) \neq 0$, also ex. da g stetig und U offen ein $\delta_z > 0$ sd. $U_{\delta_z}(z) \subseteq U$ und $\forall w \in U_{\delta_z}(z)$: $g(w) \neq 0$.

Setze nun $V := \bigcup_{z \in \overline{D}} U_{\delta_z}(z)$. Dann ist $V \subseteq U$ offen und $\overline{D} \subseteq V$ mit $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in V$.

Also ist $h: V \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{g(z)}$ holomorph. Es ist außerdem $\overline{D}$ zshgd,

also V Gebiet und da $\overline{D} \subseteq V$ kompakt, nimmt nach Max.prinzip für Kompakta $h|_{\overline{D}}$ sein Betragsmax. auf $\partial\overline{D} = \partial D$ an. Es gilt $|f(z)| = |g(z)|$ auf ∂D also $|h(z)| = 1$ auf ∂D. Es folgt $|h(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \overline{D}$.

Außerdem ist h stetig, also $h(\overline{D})$ kompakt, insbes. ex. ein Betragsminimum in $z_0 \in \overline{D}$ von h.

- Falls $z_0 \in \partial D$ ist $|h(z)| = 1 \quad \forall z \in \overline{D}$ insbes. $|h(z)| = 1 \quad \forall z \in D$ insbes. ex. ein Betragsmax. auf D, also ist h konstant.
- Falls $z_0 \notin \partial D$, folgt $z_0 \in D$. h hat also ein lok. Betragsminimum in z_0 mit $h(z_0) \neq 0$ (da $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}$). Also ist h konstant.

Es ex. also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ sd. $h(z) = \lambda \quad \forall z \in \overline{D}$, insbes. ist $1 = |h(z)| = |\lambda| \quad \forall z \in \partial D$.

Da D beschränkt und $D \neq \emptyset$ ist $\partial D \neq \emptyset$ also $|\lambda| = 1$. Es gilt insgesamt für $z \in D$:

$$\lambda = h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}, \text{ also } f(z) = \lambda g(z).$$

Da D offen enthält es mind. einen HP und nach Identitätssatz für holom. Fkt folgt $f = \lambda g$.

$\square$