

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Beh.: $HK = KH \implies HK$ Untergruppe von G .

Beweis. Sei $HK = KH$.

(i) Es ist $e \in H \cap K$, also $e \in HK$.

(ii) Seien $a, b \in HK$. Dann ex. $h_1, h_2 \in H$ und $k_1, k_2 \in K$, s.d. $a = h_1 k_1$ und $b = h_2 k_2$. Dann ist $ab = h_1 \underbrace{k_1 h_2}_{\in KH} k_2$. Da $KH = HK$ ex. $h_3 \in H$ und $k_3 \in K$, s.d. $k_1 h_2 = h_3 k_3$. Damit folgt, da H und K Untergruppen:

$$ab = h_1 k_1 h_2 k_2 = \underbrace{h_1 h_3}_{\in H} \underbrace{k_3 k_2}_{\in K} \in HK.$$

(iii) Sei $a \in HK$. Dann ex. $h \in H$ und $k \in K$ s.d. $a = hk$. Dann folgt

$$a^{-1} = (hk)^{-1} = \underbrace{k^{-1}}_{\in K} \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \in KH = HK.$$

□

Aufgabe 2. (a) Beh.: $a = \prod_{g \in G, g^2=e} g$.

Beweis. Es gilt zunächst $\forall g \in G: g^2 \neq e$ gilt $(g^{-1})^2 \neq e$, denn Inverse sind eindeutig in Gruppen. Da G abelsch folgt durch Umordnung

$$\prod_{\substack{g \in G \\ g^2 \neq e}} g = e.$$

Damit folgt

$$a = \prod_{g \in G} g \stackrel{G \text{ abelsch}}{=} \prod_{\substack{g \in G \\ g^2=e}} g \cdot \underbrace{\prod_{\substack{g \in G \\ g^2 \neq e}} g}_{=e} = \prod_{\substack{g \in G \\ g^2=e}} g.$$

□

Beh.: $a^2 = e$.

Beweis. Es folgt direkt

$$a^2 = \left(\prod_{\substack{g \in G \\ g^2=e}} g \right)^2 = \prod_{\substack{g \in G \\ g^2=e}} g^2 = e.$$

□

(b) Beh.: Für p prim gilt $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Beweis. Zunächst ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, denn $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nach LAI Körper, da p prim. Damit gilt für $\bar{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$\bar{a}^2 = \bar{1} \iff \bar{a}^2 - \bar{1} = 0 \iff (\bar{a} + \bar{1})(\bar{a} - \bar{1}) = 0 \iff \bar{a} = \bar{1} \text{ oder } \bar{a} = \overline{-1}.$$

Da p prim gilt außerdem $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. Damit folgt

$$\overline{(p-1)!} = \prod_{\bar{g} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \bar{g} \stackrel{(a)}{=} \prod_{\substack{\bar{g} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \\ \bar{g}^2 = \bar{1}}} \bar{g} = \bar{1} \cdot \overline{-1} = \overline{-1}.$$

Das zeigt die Behauptung.

□

Aufgabe 3. (a) Beh.: $Z(G)$ ist Normalteiler in G .

Beweis. Zunächst zeige $Z(G)$ ist Untergruppe in G .

- (i) $e \in Z(G)$, denn $eh = h = he \forall h \in G$.
 (ii) Seien $a, b \in Z(G)$ und $h \in G$ beliebig. Dann ist

$$(ab)h \stackrel{b \in Z(G)}{=} ahb \stackrel{a \in Z(G)}{=} h(ab).$$

Also $ab \in Z(G)$.

- (iii) Sei $a \in Z(G)$ und $h \in G$. Dann ist

$$a^{-1}h = a^{-1}h \cdot aa^{-1} \stackrel{a \in Z(G)}{=} a^{-1}aha^{-1} = ha^{-1}.$$

Bleibt zu zeigen, dass $Z(G)$ Normalteiler. Dazu sei $a \in G$. Dann folgt wegen der Kommutativität des Zentrums direkt

$$aZ(G)a^{-1} = aa^{-1}Z(G) = Z(G).$$

□

- (b) Beh.: $G/Z(G)$ zyklisch $\implies G$ abelsch.

Beweis. Sei $G/Z(G)$ zyklisch. Dann ex. $g \in G$, s.d. $\langle \bar{g} \rangle = G/Z(G)$. Seien nun $a, b \in G$ beliebig. Dann ist ex. $n, m \in \mathbb{N}$, s.d. $\bar{a} = \bar{g}^n = \overline{g^n}$ und $\bar{b} = \bar{g}^m = \overline{g^m}$.

Also ex. $h_1, h_2 \in Z(G)$ s.d. $a = h_1g^n$ und $b = h_2g^m$. Damit folgt unter mehrfacher Ausnutzung der Zentrumsseigenschaft für h_1 und h_2 :

$$ab = h_1g^n h_2g^m = h_1g^n g^m h_2 = h_1g^m g^n h_2 = h_2g^m h_1g^n = ba.$$

□

Aufgabe 4. (a) Beh.: D_4 ist eine Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. (i) $E_2 \in D_4$, denn $E_2(\square) = \square$.

- (ii) Seien $A, B \in D_4$. Dann ist

$$(AB)(\square) = A(B(\square)) = A(\square) = \square.$$

Also $AB \in D_4$

- (iii) Sei $A \in D_4$. Dann ex. $A^{-1} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\square = \underbrace{(A^{-1}A)}_{=E_2}(\square) = A^{-1}(A(\square)) = A^{-1}(\square).$$

Also $A^{-1} \in D_4$.

□

- (b) Beh.: $\text{ord}(D_4) = 8$.

Beweis. Zunächst gilt für $A \in D_4$: A ist isometrisch, also ist nach LAI A immer eine Drehspiegelung um $(0, 0)$.

Damit bleiben für $\square$ genau 4 erhaltende Rotationen und 4 Spiegelachsen. Damit folgt die Behauptung. □

- (c) Die Punkte von $\square$ sind durch den festen Abstand der Eckpunkte von einander eindeutig durch ihre zwei benachbarten Ecken festgelegt.

Damit ex. eine injektive Abbildung $\iota : D_4 \hookrightarrow S_4$. Es reicht also die Permutation der Eckpunkte anzugeben. Diese sind:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$