Aufgabe	A8	A9	A10	A11	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 8. Seien I, J, K Ideale im Ring R.

(a) Beh.: $I(J+K) = IJ + IK$.

Beweis. „$\subseteq$": Sei $r \in I(J+K)$. Dann ex. $a_1, \ldots, a_n \in I$, $b_1, \ldots, b_n \in (J+K)$ und $\forall b_i : \exists c_i \in J, d_i \in K$, s.d.

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(c_i + d_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i + a_i d_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{\in IJ} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{\in IK} \in IJ + IK.$$

„$\supseteq$": Wegen J, K Ideale gilt $0 \in J$, $0 \in K$, d.h. $IJ = I(J + (0)) \subseteq I(J+K)$ und $IK \subseteq I((0) + K) \subseteq I(J+K)$. Da $I(J+K)$ Ideal, folgt $IJ + IK \subseteq I(J+K)$. □

(b) Beh.: $(I \cap J)(I + J) \subseteq IJ \subseteq I \cap J$.

Beweis. Sei $r \in (I \cap J)(I+J)$. Dann ex. $a_1, \ldots, a_n \in I \cap J$, $c_1, \ldots, c_n \in I$ und $d_1, \ldots, d_n \in J$ s.d.

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i(c_i + d_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i + c_i d_i + a_i d_i - c_i d_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i + d_i)}_{\in IJ} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i(a_i - c_i)}_{\in IJ} \in IJ.$$

Also folgt $(I \cap J)(I+J) \subseteq IJ$.

Sei nun $r \in IJ$. Dann ex. $a_1, \ldots, a_n \in I$ und $b_1, \ldots, b_n \in J$ mit

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Wegen $a_i \in I$ und I Ideal, ist $a_i b_i \in I$ und wegen $b_i \in J$ und J Ideal, ist $a_i b_i \in J$, also $r \in I \cap J$. Damit folgt $IJ \subseteq I \cap J$ und die Behauptung. □

(c) Beh.: Ist $I + J = (1)$, dann ist $I \cap J = IJ$.

Beweis. Es sei $I + J = (1)$. Mit (b) folgt bereits $IJ \subseteq I \cap J$.

Außerdem folgt mit (b): $(I \cap J)(I + J) = (I \cap J)(1) \subseteq IJ$. Bleibt zu zeigen: $I \cap J \subseteq (I \cap J)(1)$. Sei dazu $r \in I \cap J$. Dann ist $r = r \cdot 1 \in (I \cap J)(1)$. Damit folgt $I \cap J \subseteq IJ$ und die Behauptung. □

Aufgabe 9. Beh.: Er füttert und badet die Python vom Mittwoch dieser Woche in sieben Tagen am selben Tag.

Beweis. Zunächst ist die Fütterung durch $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und das Baden durch $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ modelliert. Weiter sind $4\mathbb{Z}$ und $7\mathbb{Z}$ wegen $2 \cdot 4 - 7 = 1$ relativ prim.

Außerdem ist $4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} \supseteq 28\mathbb{Z}$, denn: $28 = 4 \cdot 7 \in 4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z}$. Weiter ist $4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} \subseteq 28\mathbb{Z}$, denn: $\forall r \in 28\mathbb{Z}$ gilt $4 \mid r$ und $7 \mid r \implies r \in 4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z}$.

Mit dem chinesischen Restsatz folgt damit:

$$\mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Startzeitpunkt Mittwoch ist $(\overline{1}, \overline{0}) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Nach dem chinesischen Restsatz existiert auch die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Es ist $\varphi(21) = (\overline{1}, \overline{0})$, da $21 \equiv 1 \pmod 4$ und $21 \equiv 0 \pmod 7$. Also ist in 7 Tagen, ausgehend von Mittwoch dieser Woche:

$$\varphi(21 + 7) = \varphi(28) = (\overline{0}, \overline{0}).$$

Also wird die Python an diesem Tag sowohl gebadet, als auch gefüttert. □

Aufgabe 10. Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ und $\delta \colon \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \to \mathbb{N}_0$, $a + b\sqrt{-3} \mapsto a^2 + 3b^2$.

(a) Beh.: $\delta(1) = 1$ und $\delta(x \cdot y) = \delta(x) \cdot \delta(y)\ \forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Beweis. Es gilt $\delta(1) = 1^2 = 1$.
Seien $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $x = a + \sqrt{-3}b$ und $y = c + \sqrt{-3}d$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\delta(x \cdot y) &= \delta(ac - 3bd + \sqrt{-3}(bc + ad)) \\
&= a^2c^2 - 6bdac + 9b^2d^2 + 3(b^2c^2 + 2bdac + a^2d^2) \\
&= a^2c^2 + 9b^2d^2 + 3b^2c^2 + 3a^2d^2 \\
&= (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) \\
&= \delta(a + \sqrt{-3}b) \cdot \delta(c + \sqrt{-3}d) \\
&= \delta(x) \cdot \delta(y).
\end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \mid \delta(x) = 1\} = \{\pm 1\}$

Beweis. Zunächst gilt: $\{\pm 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \mid \delta(x) = 1\}$, denn $\delta(1) = 1 = \delta(-1)$.
Sei nun $x \in \mathbb{Z}[-3]$ mit $\delta(x) = 1$. Dann ex. $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $x = a + \sqrt{-3}b$. Damit folgt

$$\delta(x) = \underbrace{a^2}_{\geq 0} + \underbrace{3b^2}_{\geq 0} = 1.$$

Ang. $b \neq 0$, dann ist $b^2 \geq 1 \implies 3b^2 \geq 3 \implies \delta(x) \geq 3$ ↯. Also ist $b = 0 \implies a^2 = 1 \implies x \in \{\pm 1\}$. Damit gilt $\{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \mid \delta(x) = 1\} = \{\pm 1\}$.
Sei nun $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$. Dann ex. $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $xy = 1 \implies \delta(xy) = \delta(x)\delta(y) = 1$. Wegen $\delta(x), \delta(y) \in \mathbb{N}_0 \implies \delta(x) = 1$. Also $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times \subseteq \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \mid \delta(x) = 1\} = \{\pm 1\}$.
Offensichtlich ist $1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1$, also $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$. Damit folgt die Beh. □

(c) Beh.: $\delta^{-1}(2) = \emptyset$.

Beweis. Ang. es ex. ein $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $\delta(x) = 2$. Dann ex. $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $x = a + \sqrt{-3}b$. Dann folgt $\delta(x) = a^2 + 3b^2 = 2$.

Ang.: $b \neq 0 \implies b^2 \geq 1 \implies 3b^2 \geq 3$. Wegen $a^2 \geq 0 \implies \delta(x) \geq 3$ ↯. Also $b = 0$.

Damit folgt $a^2 = 2$, aber $a \in \mathbb{Z}$ ↯. □

Beh.: ± 2 und $\pm(1 \pm \sqrt{-3})$ sind irreduzibel.

Beweis. Es gilt zunächst $\delta(2) = \delta(1 \pm \sqrt{-3}) = 4$.

Seien $x, y \in R$ mit $xy = 2$. Dann folgt $\delta(x) \cdot \delta(y) = \delta(xy) = \delta(2) = 4$. Da aber $\delta(a) \in \mathbb{N}_0$ $\forall a \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, folgt, dass $\delta(2) = 4$ nur als $\delta(2) = 2 \cdot 2$ oder $\delta(2) = 4 \cdot 1$ darstellbar ist.

Wegen $\delta^{-1}(2) = \emptyset$, folgt, dass entweder $\delta(x) = 1$ oder $\delta(y) = 1$ ist. Wegen (b) folgt damit, dass $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$ oder $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$.

Für $1 \pm \sqrt{-3}$ analog.

Da $2 \mathrel{\hat{=}} -2$ und $1 \pm \sqrt{-3} \mathrel{\hat{=}} -(1 \pm \sqrt{-3})$, folgt die Behauptung. □

Beh.: 2 ist kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Beweis. Es gilt $2 \mid 4 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$. Aber $2 \nmid (1 \pm \sqrt{-3})$, da $1 \pm \sqrt{-3}$ irreduzibel und $2 \neq \pm 1$ und $2 \neq 1 \pm \sqrt{-3}$. Also ist 2 kein Primelement. □

(d) Beh.: $\mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3}) = \emptyset$.
Notation: $T :=$ gemeinsame Teiler von 4 und $2+2\sqrt{-3}$.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3}) \subseteq T.$$

Weiter ist $\delta(4) = \delta(2+2\sqrt{-3}) = 16$. Sei $b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ Teiler von $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $\delta(a) = 16$. Dann ex. $c \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ s.d. $a = bc$. Dann gilt $\delta(a) = \delta(bc) = \delta(b) \cdot \delta(c) = 16$. Wegen $\delta(b) \in \mathbb{N}_0 \implies \delta(b) \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$. Wegen $\delta^{-1}(2) = \emptyset$ und $2 \cdot 8 = 16 \implies \delta(b) \in \{1, 4, 16\}$.

Es lässt sich nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}(1) &= \{\pm 1\} \\
\delta^{-1}(4) &= \{\pm 2, \pm(1 \pm \sqrt{-3})\} \\
\delta^{-1}(16) &= \{\pm 4, \pm(2 \pm 2\sqrt{-3})\}.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass für die gemeinsamen Teiler gilt:

$$T \subseteq \{\pm 1, \pm 2, \pm(1 \pm \sqrt{-3}), \pm 4, \pm(2 \pm 2\sqrt{-3})\}.$$

Es gilt weiter $4 \nmid (2 \pm 2\sqrt{-3})$, da $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$4(a + \sqrt{-3}b) = \underbrace{4a}_{\neq 2} + 4b\sqrt{-3} \neq 2 \pm 2\sqrt{-3}.$$

Da -4 bzw. $-(2 \pm \sqrt{-3})$ assoziierte zu 4 bzw. $2 \pm \sqrt{-3}$ sind, folgt $\pm 4 \nmid \pm(2 \pm 2\sqrt{-3})$.
Außerdem gilt $(2 \pm 2\sqrt{-3}) \nmid 4$, da, ang. es ex. $a, b \in \mathbb{Z}$ mit:

$$4 = (2 \pm 2\sqrt{-3})(a + \sqrt{-3}b) = \underbrace{2a \mp 6b}_{=4} + \sqrt{-3}(\underbrace{2b \pm 2a}_{=0}) \implies 2a = \mp 2b \implies \mp \underbrace{8b}_{\in \mathbb{Z}} = 4 \quad \lightning.$$

Analog folgt wieder $\pm(2 \pm 2\sqrt{-3}) \nmid \pm 4$. Damit folgt ± 4, $\pm(2 \pm 2\sqrt{-3})$ sind keine gemeinsamen Teiler von 2 und $2 + 2\sqrt{-3}$, d.h. ± 4, $\pm(2 \pm 2\sqrt{-3}) \notin \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3})$.
Es folgt also

$$T \subseteq \{\pm 1, \pm 2, \pm(1 \pm \sqrt{-3})\}.$$

Wegen $4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ und $2 + 2\sqrt{-3} = 2 \cdot (1+\sqrt{-3})$, sind 2 und $1+\sqrt{-3}$ gemeinsame Teiler:

$$\{2, 1+\sqrt{-3}\} \subseteq T \subseteq \{\pm 1, \pm 2, \pm(1 \pm \sqrt{-3})\}.$$

Da $2, 1+\sqrt{-3} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times$, folgt $2 \nmid \pm 1$, $(1+\sqrt{-3}) \nmid \pm 1$. Also folgt $\pm 1 \notin \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3}$.
Wegen 2 und $1+\sqrt{-3}$ ungleich, keine Einheiten und irreduzibel, folgt $2 \nmid \pm(1 \pm \sqrt{-3})$ und $(1+\sqrt{-3}) \nmid \pm 2$. Also ist $\pm 2, \pm(1 \pm \sqrt{-3}) \notin \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3})$.
Damit folgt die Behauptung. □

(e) Beh.: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht faktoriell.

Beweis. Es ist 2 und $1 \pm \sqrt{-3}$ irreduzibel. Damit folgt

$$4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

Damit hat 4 keine, bis auf Assoziiertheit und Reihenfolge eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente. Also folgt die Behauptung. □

Aufgabe 11. Sei R ein Ring. Beh.: R ist noethersch $\iff$ Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.

Beweis. „ $\implies$ ": Sei R noethersch und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann konstruiere induktiv eine Folge von Idealen $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dazu sei $a_1 \in I$. Setze $I_1 := (a_1)$.

Seien I_1 bis I_j bereits konstruiert. Dann sei $a_{j+1} \in I$ mit $a_{j+1} \notin I_j$. Falls kein a_{j+1} mit solcher Eigenschaft existiert, folgt mit $I = (a_1, \ldots, a_j)$ die Behauptung. Sonst setze $I_{j+1} := (a_1, \ldots, a_j, a_{j+1})$. Dafür gilt nach Konstruktion: $I_j \subseteq I_{j+1} \subseteq I$.

So ensteht eine aufsteigende Kette von Idealen in R. Da R noethersch, ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $I_j = I_n \ \forall j \geq n$. Für I_n gilt damit $I_n = (a_1, \ldots, a_n) = I$, also ist I endlich erzeugt.

„ $\impliedby$ ": Sei jedes Ideal in R endlich erzeugt und $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ aufsteigende Kette von Idealen. Dann setze

$$J := \bigcup_{k\geq 1} I_k.$$

Zunächst gilt J ist Ideal in R, da

(I1) $0 \in I_k \ \forall k \geq 1 \implies 0 \in J$

(I2) Seien $a, b \in J \implies \exists k, l \in \mathbb{N}$ mit $a \in I_k$ und $b \in I_l$. O.E. sei $k \geq l$. Dann ist $I_l \subseteq I_k \implies a, b \in I_k$. Da I_k Ideal, folgt $a + b \in I_k \implies a + b \in J$.

(I3) Sei $a \in J$, $r \in R \implies \exists k \in \mathbb{N}$ mit $a \in I_k$. Da I_k Ideal, folgt $r \cdot a \in I_k \implies r \cdot a \in J$.

Da jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, ex. $a_1, \ldots, a_k \in R$ mit $J = (a_1, \ldots, a_k)$. Also ist $a_1, \ldots, a_k \in J$. Damit ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in I_n$. Also ist $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq I_n \subseteq J = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann folgt $I_n = J$, also gilt $\forall k \geq n$: $I_k = I_n$. Damit ist R noethersch. $\square$