

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. a) Einheitssphäre

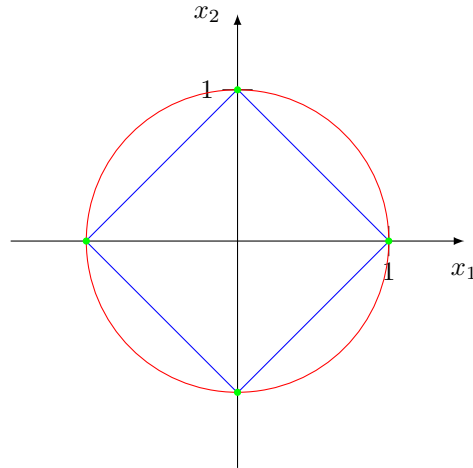


Abbildung 1: Blau: $\|\cdot\|_1$, Rot: $\|\cdot\|_2$, Grün: $\|\cdot\|_\infty$

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k \cdot 1| \stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \|x\|_2 \cdot \|1\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Außerdem ist

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_2 \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{|x_k|}{\|x\|_2}}_{\leq 1} \right) \geq \|x\|_2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2}{\|x\|_2^2} \right) = \|x\|_2 \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \geq \sqrt{\|x\|_\infty^2} = \|x\|_\infty.$$

Damit folgt

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Die anderen Kombinationen folgen durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Für $n \rightarrow \infty$ ist $\sqrt{n} \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2.

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

a) Es ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}.$$

Damit folgt

$$k = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ist

$$k = \frac{x-1}{1} = x-1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty,$$

also f schlecht konditioniert.

Aufgabe 3. a) Die Matrix ist eine $N-1 \times N-1$ Matrix, da eine Gleichung für jeden Knoten bis auf den Referenzknoten existiert.

b) Jeder Knoten hat entweder 2 (Ecken), 3 (Außenkanten) oder 4 (im Inneren) ein oder ausgehende Kanten. Die mit der Pumpe verbundenen Knoten, haben jeweils eine Kante mehr. Die zugehörigen Zeilen haben damit immer $1 + \text{Anzahl der verbundenen Kanten}$ Einträge ungleich 0.

c) Die Matrix ist quadratisch und hat vollen Rang und hat damit eine eindeutige Lösung, wenn $q_p \neq 0$.

d)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_p \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. a) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (A_s x, x)_2 &= \left(\frac{1}{2} A x + \frac{1}{2} A^T x, x \right)_2 = \frac{1}{2} (A x, x) + \frac{1}{2} (A^T x, x) = \frac{1}{2} x^T A^T x + \frac{1}{2} x^T A x \\ &= \frac{1}{2} x^T A^T x + \frac{1}{2} (x^T (A x))^T = \frac{1}{2} x^T A^T x + \frac{1}{2} x^T A^T x = x^T A^T x = (A x, x)_2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

b) Sei $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig und A_X nicht positiv definit. Dann ex. ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{|X|} \setminus \{0\}$ mit $A_X x \leq 0$. Dann ergänze $\tilde{x}$ zu $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_i := \begin{cases} x_i & i \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $x^T A x = \tilde{x}^T A_X \tilde{x} \leq 0$, also ist A nicht positiv definit.

c) Mit (a) folgt: A g.d. positiv definit, wenn

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

positiv definit ist. Dies ist mit dem Hauptminorenkriterium für symmetrische Matrizen g.d. der Fall, wenn

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 2 \end{vmatrix} &= 4 - \frac{\alpha^2}{4} > 0 \\ \iff 16 - \alpha^2 &> 0 \\ \iff |\alpha| &< 4. \end{aligned}$$