Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1. (a) Beh.: Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x_1 + \ldots + x_n)^\nu = \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Beweis. Induktion über n. I.A.: $n = 1$ trivial.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und Beh. gezeigt für $n-1$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 \ldots + x_n)^\nu &= (x_1 + (x_2 + \ldots + x_n))^\nu \\
&\overset{\text{Bin. Formel}}{=} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} x_1^k (x_2 + \ldots + x_n)^{\nu-k} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=0}^{\nu} x_1^k (\nu-k)! \sum_{|\alpha|=\nu-k} \frac{\tilde{x}^\alpha}{\alpha!} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-k)!} (\nu-k)! \sum_{|\alpha|=\nu-k} \frac{\tilde{x}^\alpha x_1^k}{\alpha! k!} \\
&= \nu! \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\nu-k} \frac{\tilde{x}^\alpha x_1^k}{\alpha! k!} \\
&= \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.
\end{aligned}$$

□

(b) Beh.: Es ist mit $h = (h_1, h_2, h_3)^T \in \mathbb{R}^3$:

$$T_2^f(\hat{x} + h) = -e\left(-h_1 - h_2 - h_3 + \frac{1}{2}h_2^2 + h_1h_2 + h_1h_3\right).$$

Beweis. Mit $\hat{x} = (-1, -1, 0)^T$ folgt der Gradient von f bei $\hat{x}$ direkt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{-x_2} - x_3 e^{-x_1} \\ -x_1 e^{-x_2} \\ e^{-x_1} \end{pmatrix} \implies \nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben als

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} x_3 e^{-x_1} & -e^{-x_2} & -e^{-x_1} \\ -e^{-x_2} & x_1 e^{-x_2} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies H_f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -e & -e \\ -e & -e & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt direkt

$$\begin{aligned}
T_2^f(\hat{x} + h) &= f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(\hat{x})h, h)_2 \\
&= -e + eh_1 + eh_2 + eh_3 - \frac{1}{2}eh_2^2 - eh_1h_2 - eh_1h_3 \\
&= -e\left(-h_1 - h_2 - h_3 + \frac{1}{2}h_2^2 + h_1h_2 + h_1h_3\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Beh.: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$ hat zwei strikte lokale Maxima bei $P_1 = (1,0)^T$ und $P_2 = (-1,0)^T$ und ein striktes lokales Minimum bei $P_3 = (0,0)^T$.

Beweis. Der Gradient ergibt sich als

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 8x^3 - 2y^2x \\ 2y - 32x^2y - 8y^3 \end{pmatrix} \exp(-x^2 - 4y^2).$$

Daraus folgen die notwendigen Bedingungen

$$8x - 8x^3 - 2y^2x = 0 \tag{1}$$
$$2y - 32x^2y - 8y^3 = 0. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$8x - 8x^3 - 2y^2x = x(8 - 8x^2 - 2y^2) = 0 \implies x = 0 \vee x^2 = 1 - \frac{1}{4}y^2.$$

Für $x = 0$ folgt aus (2):

$$2y - 8y^3 \implies y(2 - 8y^2) \implies y = 0 \vee 2 = 8y^2 \implies y = 0 \vee y = \pm\frac{1}{2}.$$

Damit folgen $P_3 = (0,0)^T$, $P_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$ und $P_5 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)^T$.

Für $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$ folgt aus (2):

$$2y - 32\left(1 - \frac{1}{4}y^2\right)y - 8y^3 = 0 \implies y - 16y = 0 \implies y = 0.$$

Damit folgt für x mit $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$: $x = \pm 1$. Also $P_1 = (1,0)^T$ und $P_2 = (-1,0)^T$.

Die Hessematrix von f folgt direkt als

$$H_f(x) = \exp(-x^2 - 4y^2)\begin{pmatrix} 16x^4 + 4y^2x^2 - 40x^2 - 2y^2 + 8 & -68xy + 64x^3y + 16xy^3 \\ -68xy + 64x^3y + 16xy^3 & 2 - 32x^2 - 40y^2 + 256x^2y^2 + 64y^4 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt durch Ablesen der Eigenwerte

$$H_f(P_1) = H_f(1,0) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix} \quad \text{negativ definit} \implies P_1 \text{ striktes lokales Min.}$$
$$H_f(P_2) = H_f(-1,0) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix} \quad \text{negativ definit} \implies P_2 \text{ striktes lokales Min.}$$
$$H_f(P_3) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit} \implies P_3 \text{ striktes lokales Max.}$$
$$H_f(P_4) = H_f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit} \implies P_4 \text{ kein lokales Extremum}$$
$$H_f(P_5) = H_f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit} \implies P_5 \text{ kein lokales Extremum.}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Aufgabe 3. Beh.: Das Gleichungssystem

$$y_1 + \sin(y_1y_2) = y_1x_1 + 1 + \frac{\pi}{2}$$
$$\cos(y_1) = x_2 + y_2.$$

ist in einer Umgebung von $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)^T = (0, -1, \frac{\pi}{2}, 1)^T \in \mathbb{R}^4$ durch differenzierbare Funktionen $g_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1 = g_1(x_1, x_2)$$
$$y_2 = g_2(x_1, x_2)$$

eindeutig aufgelöst werden kann.

Beweis. Das Gleichungssystem ist darstellbar als

$$\begin{cases} y_1 + \sin(y_1 y_2) & = y_1 x_1 + 1 + \frac{\pi}{2} \\ \cos(y_1) & = x_2 + y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = y_1 + \sin(y_1 y_2) - y_1 x_1 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ 0 = \cos(y_1) - x_2 - y_2 \end{cases}.$$

Mit $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ definiere

$$F(x,y) \coloneqq \begin{pmatrix} y_1 + \sin(y_1 y_2) - y_1 x_1 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ \cos(y_1) - x_2 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$D_y F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y_2 \cos(y_1 y_2) - x_1 & y_1 \cos(y_1 y_2) \\ -\sin(y_1) & -1 \end{pmatrix} \quad D_x F(x,y) = \begin{pmatrix} -y_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

und

$$D_y F(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad D_x F(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $D_y F(x^0, y^0)^{-1} = D_y F(x^0, y^0)$. Weiter ist $F(x,y)$ stetig partiell differenzierbar, da alle partiellen Ableitungen stetig sind. Außerdem gilt $F(x^0, y^0) = 0$.

Damit folgt mit dem SIF: Es ex. eine eindeutige diff'bare Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, für die in einer Umgebung von (x^0, y^0) gilt:

$$F(x, g(x)) = 0 \implies y = g(x),$$

also das Gleichungssystem eindeutig auflöst. Die Komponentenfunktionen g_1 und g_2 von g zeigen die Behauptung. □

Beh.: $J_g(0,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Es ist mit dem SIF:

$$\begin{aligned} J_g(0,-1) = J_g(x^0) = D_x g(x^0) &= -(D_y F(x^0, y^0))^{-1} D_x F(x^0, y^0) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Beh.: Die Gleichung

$$\ln(3\epsilon + x) = \epsilon^2 x.$$

ist in einer Umgebung von $(\epsilon_0, x_0)^T = (0,1)^T$ eindeutig nach x durch eine Abbildung $x = g(\epsilon)$ auflösbar.

Beweis. Definiere

$$F(\epsilon, x) = \epsilon^2 x - \ln(3\epsilon + x).$$

Es gilt $F(\epsilon_0, x_0) = F(0,1) = -\ln(1) = 0$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} D_x F(\epsilon, x) = \frac{\partial F}{\partial x} &= \epsilon^2 - \frac{1}{3\epsilon + x} \\ D_x F(\epsilon_0, x_0) = -1 &\implies (D_x F(\epsilon_0, x_0))^{-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit ex. nach dem SIF eine eindeutige Funktion g, die die gegebene Gleichung nach x auflöst. □

Beh.: Das Taylor-Polynom 2. Ordnung von g im Punkt $\epsilon_0 = 0$ ist gegeben als

$$T_2^g(\epsilon_0 + h) = 1 - 3h + 16h^2.$$

Beweis. Es ist für F aus der ersten Behauptung

$$\nabla F(\epsilon, x) = \begin{pmatrix} 2\epsilon x - \frac{3}{3\epsilon+x} \\ \epsilon^2 - \frac{1}{3\epsilon+x} \end{pmatrix} \quad H_F(\epsilon, x) = \begin{pmatrix} 2x + \frac{9}{(3\epsilon+x)^2} & 2\epsilon - \frac{3}{(3\epsilon+x)^2} \\ 2\epsilon - \frac{3}{(3\epsilon+x)^2} & \frac{1}{(3\epsilon+x)^2} \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet an $(\epsilon_0, x_0) = (0, 1)$ folgt

$$\nabla F(\epsilon_0, x_0) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad H_F(\epsilon_0, x_0) = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch implizites Differenzieren folgt

$$g'(\epsilon_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\epsilon_0, x_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\epsilon_0, x_0) = -(-1)\cdot(-3) = -3.$$

Es gilt mit $F(\epsilon, g(\epsilon)) = 0$ und $x = g(\epsilon)$:

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(\epsilon, g(\epsilon)) = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right).$$

Angewendet auf $\frac{\mathrm{d}F\,(\epsilon, g(\epsilon)}{\mathrm{d}x} = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial x} f'\right) \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \epsilon} g' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} f'\right) f' + \frac{\partial F}{\partial x} f''. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} g''(\epsilon_0) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\epsilon_0, x_0)\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} g' + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} f'^2\right)\Big|_{(\epsilon,x)=(\epsilon_0,x_0)} \\ &= -(-1)(11 + 2(-3)(-3) + 1\cdot 9) \\ &= 32. \end{aligned}$$

Es ist $F(\epsilon_0, x_0) = 0 \implies x_0 = g(\epsilon_0) \implies g(\epsilon_0) = 1$. Damit folgt

$$T_2^g(\epsilon_0 + h) = 1 - 3h + \frac{1}{2}\cdot 32h^2 = 1 - 3h + 16h^2.$$

□

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und in einem Punkt $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T \in \mathbb{R}^3$ gelte

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \neq 0.$$

Weiter seien $g_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lokale Auflösung der Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x^0)$$

nach x_i, $i = 1, 2, 3$. Beh.: Es gilt

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = -1.$$

Beweis. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$. Definiere

$$F(x_1, x_2, x_3) \coloneqq f(x_1, x_2, x_3) - f(x^0).$$

F stetig diff'bar, da f stetig diff'bar und $D_x F(x) = D_x f(x)$. Es gilt außerdem

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x^0) \iff F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Also sind g_i auch Auflösungen von F nach x_i. Für diese gilt nach SIF:

$$D_{x_1 x_2} g_3(x_1^0, x_2^0) = -(D_{x_3} F(x_0))^{-1} D_{x_1, x_2} F(x^0).$$

analog für g_1 und g_2. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) &= -\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \\
\frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) &= -\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_3} \\
\frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) &= -\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_3}\right)^{-1} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \\
&= -\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \cdot \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_3} \cdot \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_3}\right)^{-1} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$\square$