Aufgabe	A1	A2	A3	$\sum$
Punkte				

Aufgabe 1. a) Es ist $\exp(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $\operatorname{spt}(\phi) = \overline{B_1(0)}$. Außerdem ist $\exp(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{|x|^2-1} \in C^\infty(B_1(0))$. Offensichtlich gilt auch $\partial^\alpha \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \xrightarrow{x \to 1} 0$ also folgt $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei nun $\epsilon > 0$. Nach Konstruktion ist $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Außerdem ist $\varphi_\epsilon(x) \neq 0 \iff \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \neq 0 \iff \frac{|x|}{\epsilon} < 1 \iff x \in B_\epsilon(0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Trafo.satz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(y) \, \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Trafo.satz}}{=} \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) \, \mathrm{d}y \,. \end{aligned}$$

Weiter ist $\phi \in C^\infty$, insbesondere stetig. Da $\operatorname{spt}(\varphi)$ kompakt, nimmt φ dort ein Maximum an. Setze $C := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$. Damit gilt zunächst für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\epsilon(x-y) \, \mathrm{d}y \, - f(x) \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) \, \mathrm{d}y \right| \\ &= \int_{B_\epsilon(x)} (f(y) - f(x))\varphi_\epsilon(x-y) \, \mathrm{d}y \\ &\leq \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \frac{1}{\epsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \, \mathrm{d}y \,. \end{aligned}$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig, ex. ein $\epsilon_0 > 0$, s.d.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < \epsilon_0 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{C|B_1|},$$

wobei $|B_1| = \mathscr{L}^n(B_1(0))$ bezeichne. Dann gilt für $\epsilon < \epsilon_0$:

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^\infty} &= \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * \varphi_\epsilon - f| \\ &\leq \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \, \mathrm{d}y \\ &< \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \frac{\delta}{C|B_1|} \, \mathrm{d}y \\ &= \operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\delta}{|B_1|\epsilon^n} \underbrace{\mathscr{L}^n(B_\epsilon(x))}_{=\epsilon^n |B_1|} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Also folgt $\|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^\infty} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$.

Aufgabe 2. Mit φ aus Aufgabe 8.1. ist $\varphi \in C_c^\infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, \mathrm{d}x = 1$ nach Konstruktion, also insbesondere $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da $\varphi \geq 0$. Für $\delta > 0$ setze $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta^n} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Dann ist $\varphi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ und nach Faltungsapproximationssatz ist $\|f * \varphi_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$.

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann ex. also ein $\delta > 0$ s.d. $\forall \tilde{\delta} \le \delta$ gilt: $\|f * \varphi_{\tilde{\delta}} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}$. Setze $K_n := \overline{B_n(0)}$ und $g_n := (f * \varphi_\delta)\chi_{K_n}$. Dann ist spt g_n kompakt, da spt g_n = spt $(f * \varphi_\delta) \cap$ spt χ_{K_n} als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen und wegen spt $\chi_{K_n} = K_n$ und spt $\chi_{K_n} \supseteq$ spt g_n beschränkt ist.

Es gilt weiter $|f|\chi_{K_n} \nearrow |f|$. Also ex. nach dem Satz der monotonen Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \ge n_0$:

$$\left| \|f\chi_{K_n}\|_{L^1} - \|f\|_{L^1} \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Damit folgt $\forall n \ge n_0$:

$$\underbrace{\|f\|_{L^1}}_{<\infty} = \underbrace{\int_{K_n} |f| \,\mathrm{d}x}_{<\infty} + \underbrace{\int_{K_n^c} |f| \,\mathrm{d}x}_{<\infty}$$

Also

$$\begin{aligned}\int_{K_n^c} |f| \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}x - \int_{K^n} |f| \,\mathrm{d}x \\ &= \|f\|_{L^1} - \|f\chi_{K_n}\|_{L^1} \\ &< \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Der Faltungsapproximationssatz angewendet auf g_{n_0}, ergibt ein $\delta' > 0$, s.d. $\|g_{n_0} * \varphi_{\delta'} - g_{n_0}\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{3}$. Nun setze $f_\epsilon := g_{n_0} * \varphi_{\delta'}$. Da spt g_{n_0} kompakt und $\varphi_{\delta'} \in C_c^\infty$ folgt $f_\epsilon \in C_c^\infty$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon - f\|_{L^1} &\le \|f_\epsilon - g_{n_0}\|_{L^1} + \|g_{n_0} - f\|_{L^1} \\ &= \|f_\epsilon - g_{n_0}\|_{L^1} + \int_{K_{n_0}} |f * \varphi_\delta - f| \,\mathrm{d}x + \int_{K_{n_0}^c} |f| \,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \|f * \varphi_\delta - f\|_{L^1} + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann ex. nach Aufgabe 8.2 ein $f_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{(i)}.$$

Sei nun $|h| < 1$ und setze $S := \text{spt} f_\epsilon$. Dann ist S kompakt und beschränkt, d.h. es ex. ein $0 < r < \infty$, s.d. $\overline{B_r(0)} \supseteq \bigcup_{x \in S} \overline{B_1(x)}$. Dann gilt $\forall x \in \overline{B_r(0)}^c$: $f_\epsilon(x) = f_\epsilon(x + h) = 0$ (ii).

Da $f_\epsilon \in C_c^\infty$ ex. nach Lemma von Hadamard $g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_\epsilon(x) = f_\epsilon(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Damit gilt $\forall i = 1, \ldots, n$: $|g_i|$ insbesondere stetig und nimmt damit auf der kompakten Menge $\overline{B_r(0)}$ ein Maximum an. Setze $M_i := \max_{x \in \overline{B_r(0)}} |g_i(x)|$ und damit $M := \max_{i=1,\ldots,n} M_i$. Sei $M > 0$, sonst folgt direkt $\|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{L^1} = 0$.

Sei nun $V := \mathscr{L}^n(\overline{B_r(0)})$. Dann ist g_i glm. stetig in $\overline{B_r(0)}$, d.h. $\exists \delta_i > 0$, s.d. $\forall x \in \overline{B_r(0)}$ und $h \in B_{\delta_i}(0)$: $|g_i(x) - g_i(x + h)| < \frac{\epsilon}{6rnV}$. Setze nun $\delta := \min\{\delta_i, \frac{\epsilon}{6nV}\} > 0$.

Damit folgt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \min\{\delta, \frac{\delta}{M}\}$:

$$\begin{aligned}
\|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{L^1} &\overset{\text{(ii)}}{=} \int_{B_r(0)} |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(x+h)| \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hadamard}}{=} \int_{B_r(0)} \left| f_\epsilon(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x) \,\mathrm{d}x \; - f_\epsilon(0) - \sum_{i=1}^{n} (x_i + h_i) g_i(x+h) \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_r(0)} \sum_{i=1}^{n} |x_i(g_i(x) - g_i(x+h)) - h_i g_i(x+h)| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_r(0)} \sum_{i=1}^{n} (|x_i||g_i(x) - g_i(x+h)| + |h_i g_i(x+h)| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(0)} (\underbrace{|x_i|}_{\leq r} \underbrace{|g_i(x) - g_i(x+h)|}_{< \frac{\epsilon}{6rnV}} + \underbrace{|h_i|}_{< \frac{\delta}{M}} \underbrace{|g_i(x+h)|}_{\leq M} \,\mathrm{d}x \\
&< \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(0)} \left[r \frac{\epsilon}{6rnV} + \frac{\delta}{M} M \right] \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r(0)} \left[\frac{\epsilon}{6nV} + \frac{\epsilon}{6nV} \right] \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{\epsilon}{3nV} nV \\
&= \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{(iii)}.
\end{aligned}$$

Es gilt außerdem $\|f_{\epsilon,h} - f_h\|_{L^1} = \|f_\epsilon - f\|_{L^1}$ mit Transformationssatz und der Transformation $z = x+h$ (iv). Daraus folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{L^1} &= \|f - f_\epsilon + f_\epsilon - f_{\epsilon,h} + f_{\epsilon,h} - f_h\|_{L^1} \\
&\leq \|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{L^1} + \|f_{\epsilon,h} - f_h\|_{L^1} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} 2\|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{L^1} \\
&\overset{\text{(i), (iii)}}{<} 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung.