

1 Motivation

Aus der kommutativen Algebra ist für einen kommutativen Ring A und einen A -Modul N die Adjunktion

$$- \otimes_A N \dashv \text{Hom}_A(N, -)$$

bekannt. In der klassischen homologischen Algebra definiert man die Funktoren $\text{Ext}_A^i(N, -)$ und $\text{Tor}_A^i(-, N)$ als Ableitungen der Funktoren $\text{Hom}_A(N, -)$ und $- \otimes_A N$. Nun stellt sich die Frage, ob zwischen diesen ein analoges Adjunktionsresultat gilt.

Die Antwort ist nein, denn angenommen $\text{Ext}_A^i(N, -)$ wäre rechtsadjungiert, dann folgte, dass $\text{Ext}_A^i(N, -)$ linksexakt sei. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

in $\mathbb{Z}$ -Mod lieferte dann die exakte Folge

$$\underbrace{\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{\neq 0} \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) .$$

Aber $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ und $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, also ist $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ nicht injektiv.

2 Neuer Ableitungsbegriff

Es liegt also nahe, dass der klassische Ableitungsbegriff unvollständig ist. Um einen allgemeineren zu finden, betrachtet man die Bildung von klassischen Ableitungen. Dazu seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver und linksexakter Funktor und $X \in \mathcal{A}$. Dann existiert eine injektive Auflösung von X , also ein Komplex $I^\bullet$ in $\mathcal{A}$, sodass

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

exakt ist oder, äquivalent dazu, dass die vertikalen Morphismen in

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots \end{array} \quad (1)$$

einen Quasiisomorphismus bilden, das heißt ein Komplexhomomorphismus, der Isomorphismen auf den Kohomologiegruppen induziert. Die Ableitungen von F bei X sind nun die Kohomologiegruppen des Komplexes $F(I^\bullet)$. Man zeigt dann aufwendig, dass dieser Prozess wohldefiniert ist, das heißt insbesondere nicht von der Wahl der injektiven Auflösung von X abhängt.

Anstatt den abgeleiteten Funktor von F auf $\mathcal{A}$ zu konstruieren, definiert man nun die Ableitung auf einer Komplexkategorie von $\mathcal{A}$, das heißt einer Kategorie, deren Objekte Komplexe mit Objekten aus $\mathcal{A}$ sind. Bezeichne mit $X[0]$ den oberen Komplex in (1). Dann ist es natürlich zu fordern, dass die Ableitung von F bei $X[0]$ bis auf Isomorphie mit der Ableitung von F bei $I^\bullet$ und bei allen weiteren injektiven Auflösungen von X übereinstimmt.

Dies führt zu der Idee, Objekte (und allgemeiner Komplexe) auf kategorieller Ebene mit ihren Auflösungen zu identifizieren, also eine geeignete Kategorie von Komplexen zu finden, in der quasiisomorphe Komplexe bereits isomorph sind. Dazu kann man zunächst zur Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ übergehen, das heißt die Kategorie, deren Objekte Komplexe aus $\mathcal{A}$ und deren Morphismen Homotopieäquivalenzklassen von Komplexhomomorphismen sind. Allerdings ist ein Quasiisomorphismus im Allgemeinen keine Homotopieäquivalenz. Deshalb konstruiert man eine weitere Kategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, die derivierte Kategorie von $\mathcal{A}$, mit den Objekten von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$,

wobei alle Quasiisomorphismen in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ Isomorphismen in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ induzieren. Man erhält einen kanonischen Funktor $Q_{\mathcal{A}}: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Die (Rechts-)Ableitung von F ist nun (falls existent) ein Funktor $RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ mit einer natürlichen Transformation $\xi: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$, die den Zusammenhang zwischen RF und F herstellt.

Im Allgemeinen ist die Existenz von RF eine schwierige Frage, in der klassischen Situation existiert RF jedoch zumindest auf der Unterkategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})^+$ der nach unten beschränkten Komplexe und die Kohomologiegruppen $H^i RF(X[0])$ stimmen mit den klassischen Rechtsableitungen $R^i F(X)$ überein. Vom klassischen Standpunkt erwartungsgemäß, induziert die natürliche Transformation ξ auf der Klasse der nach unten beschränkten Komplexe mit injektiven Objekten Isomorphismen, das heißt F stimmt mit seiner Ableitung RF auf diesen Komplexen überein.

Dieser neue Ableitungsbegriff erlaubt auf natürliche Weise auch Funktoren¹ $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ zuzulassen. Analog zur klassischen Theorie ist dann die Existenz der Ableitung von F gesichert durch:

- (1) eine Klasse $\mathcal{J}$ von F -azyklischen Komplexen, das heißt eine Klasse von Komplexen für die F Exaktheit erhält, und
- (2) für jeden Komplex einen Quasiisomorphismus in einen Komplex aus $\mathcal{J}$.

In diesem Fall induziert ξ auf den Komplexen aus $\mathcal{J}$ Isomorphismen, das heißt Ableitungen berechnen sich, analog zur klassischen Situation, durch Auflösungen durch Komplexe aus $\mathcal{J}$.

Besonders die zweite Bedingung ist für beliebige abelsche Kategorien jedoch nur sehr schwer zu erfüllen und hängt durch $\mathcal{J}$ von dem konkreten Funktor F ab. Spaltenstein hat das in seiner Arbeit „Resolution of unbounded complexes“ [?] für zahlreiche Funktoren unter wenigen Voraussetzungen an die beteiligten Kategorien gelöst. Die vorliegende Arbeit stellt im ?? Abschnitt sein Argument dar, um dies im ?? Abschnitt auf den Homfunktor und das Tensorprodukt anzuwenden.

Dafür erweitern wir die Funktoren $\text{Hom}_A(N, -)$ und $- \otimes_A N$ in natürlicher Weise zu Funktoren $\mathcal{K}(A\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{K}(A\text{-Mod})$, sodass die Erweiterungen, angewendet auf eingradige Komplexe, mit den ursprünglichen Funktoren übereinstimmen. Der naive Ansatz $\text{Hom}_A(N, -)$ bzw. $\text{Hom}_A(-, N)$ in beiden Variablen zu erweitern, indem für Komplexe $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ gradweise $\text{Hom}_A(M^i, N^i)$ gebildet wird, ist nicht hinreichend, denn dieser neue Komplex enthielte keine Informationen über die Komplexhomomorphismen von $M^\bullet$ nach $N^\bullet$.

Definition 2.1. Anstatt dessen definiert man für $n \in \mathbb{Z}$ und Komplexe $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$:

$$\text{Hom}^n(M^\bullet, N^\bullet) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M^i, N^{i+n})$$

mit Differential

$$d^n(f) = d_{N^\bullet} f - (-1)^n f d_{M^\bullet}.$$

Lemma 2.2. Dann erhält man den Zusammenhang

$$H^0 \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(M^\bullet, N^\bullet).$$

Definition 2.3. Für $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ definiert man nun $M^\bullet \otimes_A N^\bullet$ so, dass man, analog zur klassischen Adjunktion, für $P^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, \text{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet))$$

erhält.

¹Unter Voraussetzung einer schwachen Bedingung an F , die beispielsweise erfüllt ist, wenn F von einem additiven Funktor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induziert ist.

Das Ziel ist nun die Funktoren $\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$, $\text{Hom}^\bullet(-, N^\bullet)$ und $- \otimes_A N^\bullet$ abzuleiten. Dafür suchen wir jeweils eine Klasse $\mathcal{J}$ von Komplexen, die die Bedingungen (1) und (2) für den entsprechenden Funktor erfüllt.

Für $\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$ definieren wir dafür

Definition 2.4. Ein Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ heißt *K-injektiv*, wenn der Funktor $\text{Hom}^\bullet(-, I^\bullet)$ Exaktheit von Komplexen erhält. Eine *K-injektive Auflösung* eines Komplexes $M^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist ein Quasiisomorphismus $M^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit einem K-injektiven Komplex $I^\bullet$.

Sei nun $\mathcal{J}$ die Klasse der K-injektiven Komplexe. Die Bedingung (1) ist für diese Wahl erfüllt, denn:

Lemma 2.5. *Ein exakter K-injektiver Komplex ist in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ der Nullkomplex.*

Proof. Sei $I^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und K-injektiv. Dann ist

$$\text{id}_{I^\bullet} \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(I^\bullet, I^\bullet) = H^0 \text{Hom}^\bullet(I^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

□

Der schwierige Teil ist Bedingung (2) nachzuweisen.

Zuächst bemerken wir, dass nach unten beschränkte Komplexe mit injektiven Objekten K-injektiv sind. Klassisch ist bekannt, dass jeder nach unten beschränkte Komplex eine Auflösung durch einen solchen Komplex hat. Für einen beliebigen (unbeschränkten) Komplex $M^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ funktioniert die klassische, induktive Konstruktion jedoch nicht.

Wir konstruieren deshalb geeignete $\mathcal{J}$ -spezielle inverse Systeme. Das sind abzählbare inverse Systeme mit surjektiven Übergangsabbildungen, wobei die Kerne dieser in $\mathcal{J}$ liegen. Im ersten Schritt zeigen wir nun, dass $\mathcal{J}$ abgeschlossen unter $\mathcal{J}$ -speziellen inversen Limes ist, das heißt, dass die Limes von solchen Systemen in $\mathcal{J}$ liegen.

Die Idee im zweiten Schritt ist nun, für $n \in \mathbb{N}$ den unbeschränkten Komplex $M^\bullet$ so abzuschneiden, dass die Kohomologiegruppen vom Grad $\geq -n$ erhalten bleiben. So erhalten wir ein System $(\tau^{\geq -n} M^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ der abgeschnittenen Komplexe von $M^\bullet$.

Induktiv konstruieren wir dann ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein inverses System von Quasiisomorphismen $f_n: \tau^{\geq -n} M^\bullet \rightarrow I_n^\bullet$, indem wir in jedem Schritt für $n \in \mathbb{N}$ aus $\tau^{\geq -n} M^\bullet$ und $I_{n-1}^\bullet$ einen nach unten beschränkten Komplex konstruieren, der klassisch durch einen K-injektiven aufgelöst werden kann. So erhalten wir im Limes einen K-injektiven Komplex $I^\bullet$ und einen Komplexhomomorphismus $f: M^\bullet \rightarrow I^\bullet$.

Da für $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ der inverse Limes jedoch nicht exakt ist, ist $f: M^\bullet \rightarrow I^\bullet$ a priori kein Quasiisomorphismus, obwohl f_n ein solcher ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Mithilfe einer Variante des Mittag-Leffler Kriteriums können wir zeigen, dass f dennoch ein Quasiisomorphismus ist.

Dual dazu definieren wir K-projektive Komplexe und Auflösungen und zeigen, dass jeder Komplex in $A\text{-Mod}$ ebenfalls eine K-projektive Auflösung hat. Für den Funktor $- \otimes_A N^\bullet$ benötigen wir dann noch eine dritte Klasse von Komplexen, die K-flachen Komplexe, die analog zu den K-Injektiven auf das Tensorprodukt angepasst definiert werden. Wir können dann zeigen, dass jeder K-projektive Komplex schon K-flach ist und erhalten so, dass jeder Komplex auch eine K-flache Auflösung besitzt.

Im letzten Abschnitt wenden wir die Existenz von K-injektiven, K-projektiven und K-flachen Auflösungen an, um die Existenz der abgeleiteten Funktoren $\text{R Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$, $\text{R Hom}^\bullet(-, N^\bullet)$ und $- \otimes_A^L N^\bullet$ zu zeigen. Als Korollar erhalten wir daraus die Adjunktion von $- \otimes_A^L N^\bullet$ und $\text{R Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$, indem wir durch geeignetes Auflösen der beteiligten Komplexe die Situation auf die Adjunktion von $- \otimes_A N^\bullet$ und $\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$ zurückführen.