
Aufgabe 1. Beh.: f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.

Beweis. „ $\implies$ ”: trivial, denn f messbar $\implies f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$ und da $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, folgt $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.

„ $\impliedby$ ”: Sei also $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. Also $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{E}$.

$$\mathcal{K} := \{A \in \mathcal{F} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

Z.z.: $\mathcal{K}$ σ -Algebra.

- (i) $Y \in \mathcal{K}$, denn $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra.
- (ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ und damit $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra.
- (iii) Seien $A_i \in \mathcal{K}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\forall i \in \mathbb{N}: f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$. Damit folgt, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. Es ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{K}$ σ -Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, damit folgt $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$, also insgesamt $\mathcal{K} = \mathcal{F}$. Also folgt $\forall A \in \mathcal{F}: f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, also $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. $\square$