Aufgabe 1. Zwangsbedingung ist $f(a,b,c) = abc - V \overset{!}{=} 0$

Notwendige Bedingung für Minimum:

$$\vec{\nabla}(E + \lambda f) \cdot \delta\vec{x} = 0.$$

Mit

$$E(a,b,c) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

folgt

$$\vec{\nabla}E = -\frac{h^2}{4m}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}.$$

Damit folgt mit $V = abc$

$$-\frac{h^2}{4m}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = 0 \implies -\frac{h^2}{4ma^3} + \lambda\frac{V}{a} = 0 \implies \lambda = \frac{h^2}{4Vma^2} \implies \begin{cases} b^2 = a^2 \\ c^2 = a^2 \end{cases}.$$

Mit $a,b,c > 0$ und $V = abc$ folgt $a = b = c = \sqrt[3]{V}$.

Überprüfung ob ein Minimum vorliegt:

$$HE(a,b,c) = \frac{h^2}{4m}\begin{pmatrix} \frac{3}{a^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{b^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{c^4} \end{pmatrix}.$$

$HE(a,b,c)$ nach Hauptminorenkriterium positiv definit, damit liegt bei $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ ein Minimum vor.

Aufgabe 2. (a) Für die Zwangsbedingung gilt

$$\tan\alpha = \frac{z}{x - \xi(t)} \implies x\sin\alpha - \xi(t)\sin\alpha - z\cos\alpha = 0. \qquad (*)$$

(b) Damit folgen die Langrange-Gleichungen 1. Art:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} - m\ddot{\vec{x}} + \lambda\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -m\ddot{x} + \lambda\sin\alpha = 0 \implies \lambda = \frac{m}{\sin\alpha}\ddot{x} \\ m\ddot{y} = 0 \overset{\vec{x}(0)=\dot{\vec{x}}(0)=0}{\implies} y = 0 \\ mg + m\ddot{z} + \cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

Mit $(*)$ folgt

$$x = \xi + z\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \implies \ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{z}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Damit folgt für z:

$$g + \ddot{z} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\ddot{\xi} + \ddot{z}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = 0$$

$$\implies \ddot{z} = -g\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\ddot{\xi}$$

Mit $\vec{x}(0) = 0$, $\dot{\vec{x}}(0) = 0$, $\xi(0) = 0$ und $\dot{\xi}(0) = 0$ folgt

$$z = -\frac{1}{2}g\sin^2\alpha \cdot t^2 - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\xi$$

Eingesetzt in $(*)$ folgt für x

$$x = \sin^2\alpha \cdot \xi - \frac{1}{4}g\sin(2\alpha)t^2$$

Damit folgt insgesamt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha \cdot \xi - \frac{1}{4}g\sin(2\alpha)t^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\sin^2\alpha \cdot t^2 - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\xi \end{pmatrix}.$$

(c) Die Zwangskraft ist gegeben durch

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \frac{m}{\sin\alpha}\ddot{x}$ folgt direkt

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} m\ddot{\xi}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}mg\sin(2\alpha) \\ 0 \\ -\frac{m}{2}\ddot{\xi}\sin(2\alpha) + mg\cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (a) Es liege ein Potential mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ vor. Damit gilt Energieerhaltung und es folgt

$$\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) = E$$
$$\implies \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}$$

Durch Trennung der Variablen folgt

$$\mathrm{d}t = \frac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}} \implies \Delta t = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_E} \frac{|\mathrm{d}\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}}$$

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -f'(x) \end{pmatrix} \implies \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}x}\right| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Zusammen folgt

$$\Delta t = \int_{x_0}^{x_E} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Mit $V(z) = mgz$, $E = \frac{m}{2}v_0^2$, $x_0 = 0$, $x_E = 1$ und $f(x) = x$ folgt

$$\Delta t = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(\frac{m}{2}v_0^2 + mgx)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \sqrt{2}\sqrt{v_0^2 + 2gx}\Big|_0^1\,\mathrm{d}x.$$