

Aufgabe	A1	A2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1. a) Es ist $\exp(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $\text{spt}(\phi) = \overline{B_1(0)}$. Außerdem ist $\exp(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{|x|^2-1} \in C^\infty(B_1(0))$. Offensichtlich gilt auch $\partial^\alpha \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ also folgt $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei nun $\epsilon > 0$. Nach Konstruktion ist $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Außerdem ist $\varphi_\epsilon(x) \neq 0 \iff \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \neq 0 \iff \frac{|x|}{\epsilon} < 1 \iff x \in B_\epsilon(0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx \\
 &\stackrel{\text{Trafo.satz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \, dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y) \, dy \\
 &= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(y) \, dy \\
 &\stackrel{\text{Trafo.satz}}{=} \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) \, dy.
 \end{aligned}$$

Weiter ist $\phi \in C^\infty$, insbesondere stetig. Da $\text{spt}(\varphi)$ kompakt, nimmt φ dort ein Maximum an. Setze $C := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$. Damit gilt zunächst für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
 |(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_\epsilon(x-y) \, dy - f(x) \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) \, dy \right| \\
 &= \int_{B_\epsilon(x)} (f(y) - f(x)) \varphi_\epsilon(x-y) \, dy \\
 &\leq \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \frac{1}{\epsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \, dy \\
 &= \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \, dy.
 \end{aligned}$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig, ex. ein $\epsilon_0 > 0$, s.d.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < \epsilon_0 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{C|B_1|},$$

wobei $|B_1| = \mathcal{L}^n(B_1(0))$ bezeichne. Dann gilt für $\epsilon < \epsilon_0$:

$$\begin{aligned}
 \|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^\infty} &= \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f * \varphi_\epsilon - f| \\
 &\leq \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \, dy \\
 &< \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \frac{\delta}{C|B_1|} \, dy \\
 &= \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\delta}{|B_1| \epsilon^n} \underbrace{\mathcal{L}^n(B_\epsilon(x))}_{= \epsilon^n |B_1|} \\
 &= \delta.
 \end{aligned}$$

Also folgt $\|f * \varphi_\epsilon - f\|_{L^\infty} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.

Aufgabe 2. Mit φ aus Aufgabe 8.1. ist $\varphi \in C_c^\infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$ nach Konstruktion, also insbesondere $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da $\varphi \geq 0$. Für $\delta > 0$ setze $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta^n} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Dann ist $\varphi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ und nach Faltungsapproximationssatz ist $\|f * \varphi_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann ex. also ein $\delta > 0$ s.d. $\forall \tilde{\delta} \leq \delta$ gilt: $\|f * \varphi_{\tilde{\delta}} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}$. Setze $K_n := \overline{B_n(0)}$ und $g_n := (f * \varphi_{\delta})\chi_{K_n}$. Dann ist $g_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $\varphi_{\delta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und K_n kompakt.

Dann gilt $|f|\chi_{K_n} \nearrow |f|$. Also ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq n_0$:

$$|\|f\chi_{K_n}\|_{L^1} - \|f\|_{L^1}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit folgt $\forall n \geq n_0$:

$$\underbrace{\|f\|_{L^1}}_{<\infty} = \underbrace{\int_{K_n} |f| \, dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_{K_n^c} |f| \, dx}_{<\infty}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{K_n^c} |f| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx - \int_{K_n} |f| \, dx \\ &= \|f\|_{L^1} - \|f\chi_{K_n}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Setze nun $f_\epsilon := g_{n_0}$. Dann ist $f_\epsilon \in$