Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: $\forall \|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ ist

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

eine Norm.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

(N1) $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \underbrace{\|Ax\|}_{\geq 0} \geq 0.$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 \quad &\implies \quad \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \\ &\implies \quad \|Ax\| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\overset{\|\cdot\| \text{ V-Norm}}{\implies} \quad Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 \\ &\implies \quad Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \\ &\implies \quad A = 0. \end{aligned}$$

(N2) Sei $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\|\alpha A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \overset{\|\cdot\| \text{ V-Norm}}{=} \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} |\alpha| \|Ax\| = |\alpha| \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \|A\|.$$

(N3) Sei $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$$\|A + B\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax + Bx\| \overset{\|\cdot\| \text{ V-Norm}}{\leq} \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) = \|A\| + \|B\|.$$

□

(b) Beh.: Für die in (a) definierte Matrixnorm gilt

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

Beweis. Die Menge $M := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Die Funktion $f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Ax\|$ ist stetig, denn: Falls $A = 0$, dann ist $f = 0$ also stetig. Falls $A \neq 0$ dann gilt: $\forall \epsilon > 0, a \in \mathbb{K}^n$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{\|A\|}$. Sei nun $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig mit $\|x - a\| < \delta$. Dann ist

$$|\|Ax\| - \|Aa\|| \leq \|Ax - Aa\| = \|A(x-a)\| \overset{\text{verträgl.}}{\leq} \|A\| \|x - a\| < \|A\| \delta = \epsilon.$$

f nimmt als stetige Funktion auf kompakten Mengen ihr Maximum an, d.h. $\exists x_{max} \in M$, s.d.

$$\|Ax_{max}\| = \sup_{x \in M} \|Ax\| = \max_{x \in M} \|Ax\|.$$

□

(c) Beh.: Die Frobenius-Norm ist mit der euklidschen Vektornorm verträglich und submultiplikativ.

Beweis. Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig. A_i bezeichne die i-te Zeile der Matrix A. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (A_i, x)_2^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \|x\|_2^2 \\
&= \|x\|_2^2 \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \\
&= \|x\|_2^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i|^2 \\
&= \|x\|_2^2 \|A\|_F^2.
\end{aligned}$$

Also $\|\cdot\|_F$ verträglich.

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig. A_i bezeichne die i-te Zeile der Matrix A, B_j die j-te Spalte (!) der Matrix B. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n (A_i, B_j)_2^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \|A_i\|_2^2 \|B_j\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \|A_i\|_2^2 \sum_{j=1}^n \|B_j\|_2^2 \\
&= \|A\|_F \|B\|_F.
\end{aligned}$$

Also $\|\cdot\|_F$ submultiplikativ. □

Aufgabe 2. (a) Beh.: Die Menge M

$$M := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A \text{ regulär } \}$$

ist offen.

Beweis. Sei $A \in M$ beliebig. Da A regulär ist $A \neq 0$ und $\exists A^{-1} \neq 0$. Wähle $\epsilon := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Sei $B \in K_\epsilon(A)$. Dann ist $\|A - B\| < \epsilon$, also $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Mit dem Störungssatz folgt damit, dass B regulär ist, also $B \in M$. D.h. $K_\epsilon(A) \subseteq M$ und damit M offen. □

(b) Beh.: Die Resolventenabbildung

$$R\colon \operatorname{Res}(A) \subseteq \mathbb{C} \to M \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}.$$

ist stetig.

Beweis. Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Res}(A)$ Folge mit $z_k \xrightarrow{k\to\infty} a$. Dann ist

$$\begin{aligned}
R(z_k) &= (A - z_k I)^{-1} \\
&= (A - aI + aI - z_k I)^{-1} \\
&= (A - aI + (a - z_k)I)^{-1} \\
&= ((A - aI)(I + (a - z_k)(A - aI)^{-1}))^{-1} \\
&= \underbrace{(I + (\overbrace{a - z_k}^{\xrightarrow{k\to\infty} 0})R(a))^{-1}}_{\xrightarrow{k\to\infty} I} R(a) \\
&\xrightarrow{k\to\infty} R(a).
\end{aligned}$$

Damit ist R stetig auf $\operatorname{Res}(A)$. □

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$ und

$$M := \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = c\}.$$

Beh.: M ist abgeschlossen.

Beweis. Z.z.: $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$ ist offen. Sei $a \in M^C$, d.h. $f(a) \neq c$. Wähle $\epsilon := \frac{|f(a)-c|}{2}$. Da f stetig, ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x - a\| < \delta$: $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Sei $x \in K_\delta(a)$. Dann ist $\|x - a\| < \delta$. Ang.: $f(x) = c \implies |f(x) - f(a)| = |c - f(a)| = 2\epsilon > \epsilon$ ↯.

Also ist $f(x) \neq c \implies x \in M^C$. Damit ist M^C offen und M abgeschlossen. □

Beh.: M ist i.A. nicht kompakt.

Beweis. Für $n = 1$ und $f(x) = \sin x$, $c = 0$ ist $M = \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$ nicht beschränkt, also insbesondere nicht kompakt. □

Aufgabe 4. Definiere

$$S\colon C([0,\pi]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Beh.: S stetig.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. O.E.: $a \leq b$. $\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, also insbesondere auf $[a,b]$. Dann folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$-\sin(\xi) = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a}.$$

Wegen $|\sin x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ folgt

$$|\cos(b) - \cos(a)| = |b - a||\sin(\xi)| \leq |b - a| \qquad (*).$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $f \in C([0,\pi])$. Dann gilt $\forall g \in C([0,\pi])$ mit $\|f - g\|_\infty < \delta := \frac{\epsilon}{\pi}$:

$$\begin{aligned}
|S(f) - S(g)| &= \left| \int_0^\pi \cos(g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \cos(f(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_0^\pi |\cos(g(x)) - \cos(f(x))|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{\leq} \int_0^\pi |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^\pi \|g - f\|_\infty\,\mathrm{d}x \\
&< \int_0^\pi \delta\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\delta \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□