Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten also

$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b$

Matrix exponential funktion

Homogene Gleichung: $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ hat genau die Lösung $\boxed{e^{At}}\, v_0$

$\rightsquigarrow$ Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n l.u. EV $v_1, \ldots, v_n$ zu EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ so ist
$e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n$ Fundamentalsystem.

Wenn A nicht diagonalisierbar: JNF bestimmen, s.d. $A = T J T^{-1}$, dann $e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$.

A1 $\ddot x = -3\dot x - 2x + 2$. Schreibe in System 1. Ordnung um: $x_1 := x$, $x_2 := \dot x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\dot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{=:A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:b}.$$

Bestimme EW von A: $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$

also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ 2v_2 - 3v_2 = -v_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2v_1 \\ v_2 - 3v_2 = -2v_2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ Fundamentallösung $\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t} x_1 \,\middle|\, e^{\lambda_2 t} x_2 \right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$ $\quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{t} \\ -e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$

Nach Präsenzblatt 12 ist eine (spezielle) Lsg der inhomogenen Gleichung gegeben als:

$$x(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, d\tau = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 2e^{\tau} \\ -2e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \Phi(t) \begin{pmatrix} 2e^{t} + c_1 \\ -e^{2t} + c_2 \end{pmatrix} \quad \text{für geeignete } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\dot{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ Also löst $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die inhom. Gleichung und damit ist $x(t)$ die allgemeine Lösung der Gleichung.

A2 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu EW $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 0$, also

$\begin{pmatrix} e^{3t} & 1 & 0 \\ e^{3t} & -1 & 1 \\ e^{3t} & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Fundamentalsystem nach VL.

Alternativ: findet man EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und sieht $\begin{pmatrix} e^{3t} + 1 \\ e^{3t} - 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ Lösung.

Dann (wegen Symmetrie) auch $\begin{pmatrix} e^{3t} + 1 & e^{3t} & e^{3t} - 1 \\ e^{3t} - 1 & e^{3t} + 1 & e^{3t} \\ e^{3t} & e^{3t} - 1 & e^{3t} + 1 \end{pmatrix}$ Lösung.

Einsetzen von $t = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det \neq 0$ also tatsächlich Fundamentalsystem.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (nicht diagonalisierbar)

aber $\dot x = Ax \Rightarrow \dot x_3 = x_3 \Rightarrow x_3(t) = c_3 e^{t}$.

Und $\dot x_2 = x_2 + 2c_3 e^{t} \overset{\text{Variation d. Konst.}}{\Rightarrow} \dot c(t) = 2c_3 \Rightarrow c(t) = 2c_3 t + c_2$

also $x_2(t) = (2c_3 t + c_2)e^t$ ((Check: $\dot{x}_2(t) = 2c_3 e^t + (2c_3 t + c_2)e^t = x_2(t) + 2c_3 e^t$

Schließlich $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + e^t(4c_3 t + 2c_2 + 3c_3)$

Var. Konst.
$\Rightarrow$ $\dot{c}(t) = 4c_3 t + 2c_2 + 3c_3 \Rightarrow c(t) = 2c_3 t^2 + 2c_2 t + 3c_3 t + c_1$

Also $x_1(t) = (2c_3 t^2 + 2c_2 t + 3c_3 t + c_1)e^t$ ((Check: Nachrechnen).

Insgesamt ist die allg. Lsg. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (2t^2 + 3t)e^t \\ 2t e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

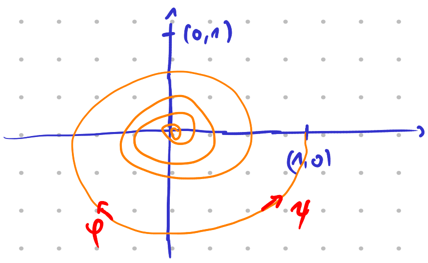
also Fund. lösung ist $\begin{pmatrix} e^t & 2t e^t & (2t^2+3t)e^t \\ 0 & e^t & 2t e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$.

A3) Seien $\lambda_{1,2}$ die EW zu EV v_1, v_2. Entweder $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ oder $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Also ist

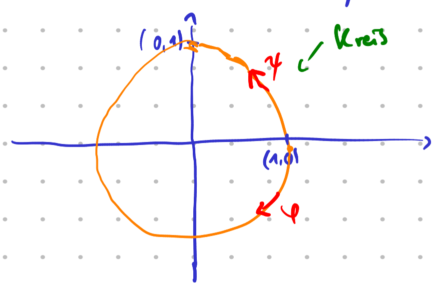
Fall 1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$: $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ zu EV $v = \xi \pm i\eta$. Dann sind

$\varphi(t) = e^{\mu t}(\cos(\nu t)\xi - \sin(\nu t)\eta)$, $\psi(t)\, e^{\mu t}(\cos(\nu t)\eta + \sin(\nu t)\xi)$ reelle Lösungen.

mit $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Fall 2. $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R}$ dann ist $\mu = 0$, d.h. $\varphi(t) = \cos(\nu t)\xi - \sin(\nu t)\eta$, $\psi(t) = \cos(\nu t)\eta + \sin(\nu t)\xi$



$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

Fall 3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit EV $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ dann sind $\varphi(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$, $\psi(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$ Lösungen.

$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\psi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$