Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Die relativen Konditionszahlen sind gegeben durch

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\frac{x_j}{F_i(x)}.$$

- $F(x,y) = x \cdot y$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x.$$

  Damit folgt

$$k_{11} = y \cdot \frac{x}{x \cdot y} = 1 \qquad k_{12} = x \cdot \frac{y}{x \cdot y} = 1.$$

  Die Multiplikation ist also gut konditioniert.

- $F(x,y) = \frac{x}{y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

  Damit folgt

$$k_{11} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}\frac{y}{x} = 1 \qquad k_{12} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y^2}\frac{y^2}{x} = -1.$$

  Die Division ist also auch gut konditioniert.

- $F(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

  Damit folgt

$$k_{11} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

  Wurzelziehen ist also ebenfalls gut konditioniert.

Aufgabe 2.

- Sei $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(h) &= (ph^2 + h^2)^2 - p^2h^4 \\ &= h^2\left(2ph + 1\right) \end{aligned}$$

  Es ist $2ph + 1 \le 2p + 1$ für $h \le 1$. Also folgt mit $c = 2p + 1$

$$f(h) = \mathcal{O}(h^2).$$

  Es ist außerdem

$$\frac{h^2(2ph+1)}{h^3} = \frac{2ph^3 + h^2}{h^3} = 2p + \frac{1}{h} \xrightarrow{h \searrow 0} \infty,$$

  also ist $f(h) \neq \mathcal{O}(h^3)$.

- Es gilt für $0 < h \le \frac{1}{e}$: $|\ln(h)| \ge 1$. Also folgt

$$|f(h)| = \left|-\frac{h^2}{\ln(h)}\right| \le h^2 \implies f(h) = \mathcal{O}(h^2).$$

  Es ist außerdem mit de l'Hospital

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{h^2}{\ln(h)h^3}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\frac{1}{h}}{\ln(h)}\right| \overset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\left|\frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h}}\right| = \infty,$$

  also ist $f(h) \neq \mathcal{O}(h^3)$.

- Es folgt mit Additionstheoremen

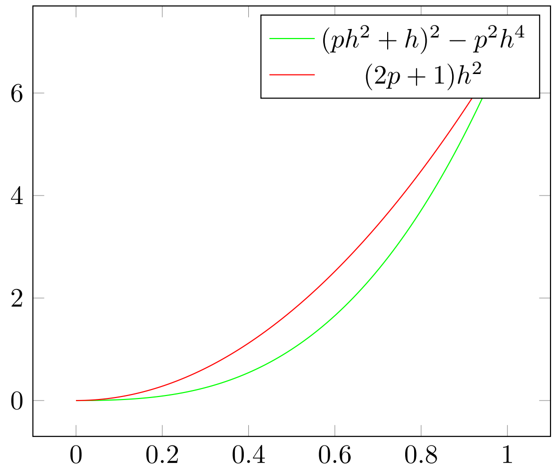
$$f(h) = \frac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h)}{h^2 + \sin(x)} = \frac{2\sin(x)(\cos(h)-1)}{h^2} + \sin(x).$$

Damit folgt $f(h) = \mathcal{O}(h^2)$, denn mit de l'Hospital ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h^2}\right| &= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)(\cos h - 1) + h^2\sin(x)}{h^4}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{-2\sin(x)\sin(h) + 2h\sin(x)}{4h^3}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{-2\sin(x)\cos(h) + 2\sin(x)}{12h^2}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)\sin(h)}{24h}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)\cos(h)}{24}\right| \\
&= \left|\frac{\sin(x)}{12}\right| < \infty
\end{aligned}$$

Es gilt außerdem $f(h) \neq \mathcal{O}(h^3)$, denn wiederum mit de l'Hospital ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h^3}\right| &= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)(\cos h - 1) + h^2\sin(x)}{h^5}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{-2\sin(x)\sin(h) + 2h\sin(x)}{5h^4}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{-2\sin(x)\cos(h) + 2\sin(x)}{20h^3}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)\sin(h)}{60h^2}\right| \\
&= \lim_{h\to 0}\left|\frac{2\sin(x)\cos(h)}{120h}\right| \\
&= \infty.
\end{aligned}$$



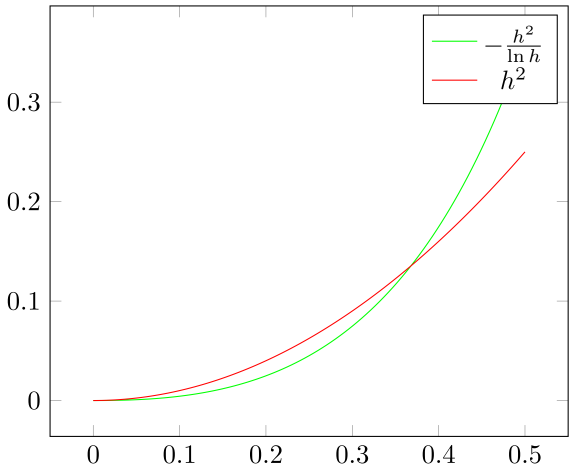


Abbildung 1: Links: $f_1(h)$ für $p = 1$ und $c = 7$, Rechts: $f_2(h)$ mit $c = 1$

Aufgabe 3. Quadratische Ergänzung führt auf die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{p^2 - 1} + p$$

Also folgt

$$\frac{\partial F_{1/2}}{\partial p} = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2-1}} + 1$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}}{1-\frac{1}{p^2}+\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}} \\ k_{21} &= \frac{-1+\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}}{-1+\frac{1}{p^2}+\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}}. \end{aligned}$$

Aus der Lösungsformel folgt zudem $F(p) \in \mathbb{R}^2 \iff |p| \geq 1$

Das alternativ parametrisierte Problem führt auf die Lösungen $x_1 = t$ und $x_2 = \frac{1}{t}$, denn

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{t^2+1}{t}t + 1 &= t^2 - t^2 - 1 + 1 = 0 \\ \frac{1}{t^2} - \frac{t^2+1}{t}\frac{1}{t} + 1 &= \frac{1}{t^2} - 1 - \frac{1}{t^2} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} &= 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} &= -\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1\frac{t}{t} = 1 \\ k_{21} &= -\frac{1}{t^2}\frac{t}{\frac{1}{t}} = -\frac{t^2}{t^2} = -1. \end{aligned}$$

Im ersten Fall wird das Problem schlecht konditioniert, wenn $|p| < 1$ wird, allerdings hat dann die Gleichung keine reellen Lösungen mehr. Im zweiten Fall, ist das Problem immer gut konditioniert.

Aufgabe 4. Es sei $I := [0, 1]$ und

$$f\colon I \to I, \quad f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, 0.5) \\ 2 - 2x & \text{falls } x \in [0.5, 1] \end{cases}.$$

Die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei für ein $x_0 \in I$ definiert als

$$x_i = f(x_{i-1}).$$

a) siehe *zeltabbildung.cpp*

b) Beh.: Sei $x_0 = (0.m_1 \dots m_r)_2 \in [0, 1]$ eine Festkommazahl der Binärdarstellung mit höchstens r Nachkommastellen ungleich 0. Dann gilt $x_{r+1} = 0$.

Beweis. Beweis per Induktion nach r.

Für $r = 0$: trivial $f(0) = 0 \implies x_1 = 0$.

Sei Beh. gegeben für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Dann sei

$$x_0 = (0.m_1 \dots m_{r+1})_2 \in [0, 1].$$

mit $m_{r+1} \neq 0$ (sonst bereits gezeigt).

Falls $x_0 \in [0, 0.5)$. Dann ist $m_1 = 0$ und

$$x_1 = f(x_0) = 2x_0 = 2\sum_{i=1}^{r+1} m_i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{r+1} m_i 2^{-i+1} = (0.\widetilde{m}_1 \dots \widetilde{m}_{r+1})_2.$$

Da $m_{r+1} = 1_2 \implies \widetilde{m}_{r+1} = 0_2$. Also hat x_1 höchstens r Stellen ungleich 0. Wende I.V. auf x_1 an. Damit folgt $x_{r+1} = 0$.

Falls $x_0 \in [0.5, 1]$. Dann ist $m_1 = 1_2$ und

$$x_1 = f(x_0) = 2 - 2x_0 = 2 - 2\sum_{i=1}^{n} m_i 2^{-i} = 2 - \sum_{i=1}^{n} m_i 2^{-i+1} = (0.\widetilde{m}_1 \ldots \widetilde{m}_{r+1})_2.$$

Da $m_{r+1} = 1_2 \implies \widetilde{m}_{r+1} = 0_2$. Also hat x_1 höchstens r Stellen ungleich 0. Wende I.V. auf x_1 an. Damit folgt $x_{r+1} = 0$. $\square$

c) siehe *zeltabbildung.cpp*