Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Beh.: $\mathcal{A}_\mu$ ist eine σ-Algebra auf X.

Beweis. (i) Mit der σ-Additivtät von μ folgt $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \implies \mu(\emptyset) = 0$. Damit folgt $X \in \mathcal{A}_\mu$, denn $\mu(\emptyset) = 0$, da μ Maß und $X \triangle X = \emptyset$. Mit (ii) ist auch $\emptyset = X^C \in \mathcal{A}_\mu$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann ex. $B, C \in \mathcal{A}$ mit $\mu(C) = 0$ und $A \triangle B \subset C$. Dann ist

$$A^c \triangle \underbrace{B^c}_{\in \mathcal{A}} = A^c \setminus B^c \cup B^c \setminus A^c = B \setminus A \cup A \setminus B = A \triangle B \subset C.$$

Also $A^c \in \mathcal{A}_\mu$.

(iii) Sei $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ex. $\forall i \in \mathbb{N}$ ein $B_i \in \mathcal{A}$ und μ-Nullmenge $C_i \in \mathcal{A}$, s.d. $A_i \triangle B_i \subset C_i$. Betrachte nun $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ und $C := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Es ist $B, C \in \mathcal{A}$ da $\mathcal{A}$ σ-Algebra. Außerdem ist $\mu(C) = 0$, wg. σ-Additivität von μ. Damit folgt

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \triangle \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \\ &= \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \\ &\subset \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \setminus B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \setminus A_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus B_i \cup B_i \setminus A_i) \\ &\subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \\ &= C. \end{aligned}$$

$\square$

Beh.: $\overline{\mu}$ ist ein Maß.

Beweis. (i) Z.z.: $\overline{\mu}$ wohldefiniert. Sei dazu $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $B, B', C, C' \in \mathcal{A}$, s.d. $A \triangle B \subset C$ und $A \triangle B' \subset C'$. Definiere $\tilde{C} := C \cup C' \in \mathcal{A}$ Es folgt direkt $\mu(\tilde{C}) = 0$. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \tilde{C} \supset \underbrace{(A \triangle B)}_{\subset C} \triangle \underbrace{(A \triangle B')}_{\subset C'} &= \underbrace{A \triangle A}_{= \emptyset} \triangle B \triangle B' \\ &= B \triangle B' \\ &= B \setminus B' \cup B' \setminus B. \end{aligned}$$

Also insbesondere $B \setminus B' \subset \tilde{C}$ und $B' \setminus B \subset \tilde{C}$. Mit $B = (B \setminus B') \cup (B \cap B')$ disjunkt und der σ-Additivität von μ folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(\underbrace{B \setminus B'}_{\subset \tilde{C}}) + \mu(B \cap B') \\ &= 0 + \mu(B \cap B') + 0 \\ &= \mu(B \cap B') + \mu(\underbrace{B' \setminus B}_{\subset \tilde{C}}) \\ &= \mu(B'). \end{aligned}$$

Also $\overline{\mu}$ wohldefiniert.

(ii) Z.z.: $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Es ist $\emptyset \triangle \emptyset = \emptyset$, also $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(iii) Die σ-Additivität folgt direkt aus der σ-Additivität von μ.

$\square$

Aufgabe 2. a) Beh.: Es existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu\colon \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}$ mit $\nu(A) = 0$ für alle endlichen Mengen $A \subseteq X$.

Beweis. Ang. es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu\colon \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}$. Dann ist $\nu([0,1]) = 1$. Definiere nun induktiv: $I_1 = [0,1]$. Für I_{k+1} teile I_k beliebig in zwei disjunkte Teilintervalle $A, B \subseteq I_k$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = I_k$ und $A, B \neq \emptyset$. Da $\nu(I_k) = 1$ und A und B disjunkt folgt mit der Additivität von ν, dass entweder $\nu(A) = 1$ oder $\nu(B) = 1$. Wähle dann $I_{k+1} = A$ oder $I_{k+1} = B$, s.d. $\nu(I_{k+1}) = 1$. Damit ist $I_{k+1} \subsetneqq I_k$ also I_k monoton fallend und $I_k \searrow \{x\}$ für $x \in [0,1]$. Außerdem gilt nach Konstruktion $\nu(I_k) = 1\ \forall k \in \mathbb{N}$. Damit folgt nach VL

$$\lim_{k\to\infty} \nu(I_k) = 1 \neq 0 = \nu(\{x\}) \quad ↯.$$

$\square$

b) Beh.: $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

Beweis. (i) $X \in \mathcal{A}$, denn $X^c = \emptyset$ endlich. $\emptyset$ selbst endlich.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Falls A höchstens abzählbar, dann ist $(A^c)^c = A$ höchstens abzählbar, analog für A^c höchstens abzählbar. Also $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Sei $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}$. Falls A_i höchstens abzählbar $\forall i \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ebenfalls abzählbar, also $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
Falls $\exists j \in \mathbb{N}$, s.d. $A_j \in \mathcal{A}$ überabzählbar, dann ist A_j^c höchstens abzählbar nach Definition. Damit folgt

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c \subseteq A_j^c.$$

Also $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$ höchstens abzählbar.

$\square$

Beh.: μ definiert ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis. (i) Es ist $\mu(\emptyset) = 0$, denn $\emptyset$ endlich.

(ii) Sei $A_i \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Falls $\forall i \in \mathbb{N}$ A_i höchstens abzählbar, dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ auch höchstens abzählbar also folgt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Falls ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. A_i überabzählbar, dann gilt $\mu(A_i) = 1$, A_i^c nach Definition von $\mathcal{A}$ abzählbar und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ überabzählbar. Da A_i paarweise disjunkt, folgt $\forall j \in \mathbb{N}\colon A_j \subseteq A_i^c$, also A_j höchstens abzählbar. Damit folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \mu(A_i) + \sum_{k\in\mathbb{N}, k\neq i} \mu(A_k) = 1 + 0 = 1 = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

$\square$

c) In (a) ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem gesamten Potenzraum gefordert, in (b) nur auf der Untermenge $\mathcal{A} \subsetneqq \mathscr{P}(X)$, denn beispielsweise weder $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$ noch $\left[0, \frac{1}{2}\right]^c \subseteq \mathbb{R}$ sind höchstens abzählbar. Deswegen liegt kein Widerspruch vor.

Aufgabe 3. a) Beh.: $\mathscr{D}$ π-System $\implies$ $\mathscr{D}$ σ-Algebra.

Beweis. Sei $\mathscr{D}$ ein π-System. Dann gilt

(i) $X \in \mathscr{D}$ klar, da $\mathscr{D}$ Dynkinsystem.

(ii) $A \in \mathscr{D} \implies A^c \in \mathscr{D}$ klar, da $\mathscr{D}$ Dynkinsystem.

(iii) Sei nun $A_i \in \mathscr{D}\ \forall i \in \mathbb{N}$. Da für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathscr{D}$ gilt $A \setminus B = A \cap B^c$. Da $\mathscr{D}$ Dynkinsystem und π-System ist, folgt $A \cap B^c \in \mathscr{D}$. Also folgt insgesamt $A \setminus B \in \mathscr{D}$.

Konstruiere nun induktiv $B_1 := A_1$ und $B_{k+1} := A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i$. Es ist wegen oben $B_k \in \mathscr{D}$ und nach Konstruktion $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Damit folgt wegen $\mathcal{D}$ Dynkinsystem

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} B_i \in \mathscr{D}.$$

□

b) Beh.: $\mathscr{H}(D)$ ist Dynkinsystem.

Beweis. (i) Es ist $\emptyset \in \mathscr{H}(D)$, denn $\emptyset \cap D = \emptyset \in \mathscr{D}_0$, da $\mathscr{D}_0$ Dynkinsystem. Ebenfalls ist $X \in \mathscr{H}(D)$, denn $X \cap D = D \in \mathscr{D}_0$.

(ii) Sei $A \in \mathscr{H}(D)$. Dann ist $A \cap D \in \mathscr{D}_0$. Da $\mathscr{D}_0$ Dynkinsystem folgt:

$$A^c \cap D = D \setminus (A \cap D) = (D^c \cup (A \cap D))^c \in \mathscr{D}_0.$$

(iii) Sei $A_i \in \mathscr{H}(D)\ \forall i \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$. Dann folgt direkt, da die A_i paarweise disjunkt sind und $\mathscr{D}_0$ Dynkinsystem:

$$\left(\dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} A_i \right) \cap D = \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} \underbrace{(A_i \cap D)}_{\in \mathscr{D}_0} \in \mathscr{D}_0.$$

□

c) Beh.: $\mathscr{H}(D) = \mathscr{D}_0$ für alle $D \in \mathscr{D}_0$.

Beweis. (1) Z.z.: $H(K) = \mathscr{D}_0\ \forall K \in \mathscr{K}$.

Sei $K \in \mathscr{K}$. Dann ist $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}(K)$, denn für $A \in \mathscr{K}$ gilt $A \cap K \in \mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}_0$, da $\mathscr{K}$ π-System.

Da wegen (b) $\mathscr{H}(K)$ Dynkinsystem und $\mathscr{D}_0$ kleinstes Dynkinsystem, das $\mathscr{K}$ enthält, folgt $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{H}(K)$. Außerdem ist nach Definition $\mathscr{H}(K) \subseteq \mathscr{D}_0$, also folgt $\mathscr{H}(K) = \mathscr{D}_0$.

(2) Z.z.: $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}(D)\ \forall D \in \mathscr{D}_0$.

Sei $D \in \mathscr{D}_0$ und $K \in \mathscr{K}$ beliebig. Da $D \in \mathscr{D}_0 = \mathscr{H}(K)$ (wg. 1) folgt $K \cap D \in \mathscr{D}_0$. Also auch $K \in \mathscr{H}(D)$.

(3) Sei nun $D \in \mathscr{D}_0$. Da $\mathscr{H}(D)$ Dynkinsystem, das $\mathscr{K}$ enthält folgt wie in (1), dass $\mathscr{H}(D) = \mathscr{D}_0$.

□

d) Beh.: $\sigma(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{D}$.

Beweis. $\mathscr{D}_0$ ist π-System, denn $\mathscr{D}_0 \neq \emptyset$ und für $A, B \in \mathscr{D}_0$ betrachte: $A \in \mathscr{H}(B) = D_0$. Damit folgt $A \cap B \in \mathscr{D}$.

Mit (a) ist $\mathscr{D}_0$ also σ-Algebra, die mit (c) $\mathscr{K}$ enthält. Da $\mathscr{D}_0$ kleinstes Dynkinsystem ist, das $\mathscr{K}$ enthält, und jede σ-Algebra auch Dynkinsystem ist und $\mathscr{D}_0$ selber σ-Algebra, folgt

$$\delta(\mathscr{K}) = \mathscr{D}_0 = \sigma(\mathscr{K}).$$

Da bereits $\mathscr{D} \supseteq \mathscr{K}$, folgt $\sigma(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{D}$. □

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe). a) Beh.: $A_* = \{x \in X \colon x \in A_k \text{ f.f.a. } k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in A_* &\iff x \in \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N} \colon \forall m \geq n \colon x \in A_m \\ &\iff x \in A_k \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

Beh.: $A^* = \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann folgt

$$\begin{aligned} x \in A^* &\iff x \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \colon \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \colon x \in A_m \\ &\iff x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

b) Verwendet werden im Folgenden die Charakterisierungen aus (a).
Beh.: $\chi_{A_*} = \liminf_{k\to\infty} \chi_{A_k}$.

Beweis. Sei $x \in X$. Falls $x \in A_*$: Dann ex. ein $k \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq k$: $x \in A_n$, also $\chi_{A_k}(x) = 1$ also

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m \geq n} \chi_{A_k}(x) = 1 = \chi_{A_*}(x).$$

Falls $x \notin A_*$: $\forall n \in \mathbb{N} \colon \exists k \in \mathbb{N}, k \geq n \colon x \notin A_k \implies \chi_{A_k}(x) = 0$, also

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 0 = \chi_{A_*}(x).$$

□

Die Behauptung für den limes superior funktioniert exakt analog.

c) Beh.: $A_* = \emptyset$ und $A^* = [0,1)$.

Beweis. Bemerke: Für $x \in [0,1)$ existieren ∞-viele A_k mit $x \in A_k$ und ∞-viele A_k mit $x \notin A_k$, denn die A_k bilden immer feinere Unterteilungen des Intervalls $[0,1)$.
Damit folgt die Behauptung aus den Charakterisierungen aus (a). □