Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Es ist $M - p := \{x - p \mid x \in M\}$ ebenfalls C^1 Mannigfaltigkeit mit $T_0(M-p) = T_pM$. Es kann also durch Übergang zu $M - p$ o.E. $p = 0$ angenommen werden.

Es existiert also eine Umgebung Ω von 0, ein $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{m-n})$ mit $M \cap \Omega = \pi(\text{graph } g)$. Durch Umnummerierung der Koordinaten sei o.E. $\pi = \text{id}$ und durch Verschiebung von U o.E. $0 = (0, g(0))$. Setze nun $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(y) := (y, g(y))$ $\forall y \in U$. Dann ist φ nach Beweis von Satz 5.2 (Implikation (ii) nach (iii)) eine Karte, also $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit $\varphi(U) = M \cap \Omega$.

Da Ω Umgebung von 0, ex. ein $s > 0$, s.d. $B_s(0) \subseteq \Omega$. Sei nun $r < s$ und $y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))$. Dann ist $|\varphi(y)| \le r$. Also

$$|y| = |(y,0)| \le |(y, g(y))| = |\varphi(y)| \le r. \tag{1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sup\{\text{dist}(x, T_0M)\colon x \in M \cap B_r(0)\} &= \sup\{\text{dist}(\varphi(y), T_0M)\colon y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))\} \\
&= \sup\left\{\inf\{|\varphi(y) - D\varphi(0)z|\colon z \in \mathbb{R}^n\}\colon y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))\right\} \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \sup\{\inf\{|D\varphi(0)y + o(|y|) - D\varphi(0)z|\colon z \in \mathbb{R}^n\} y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))\} \\
&\le \sup\{\inf\{|D\varphi(0)(y-z)| + |o(|y|)|\colon z \in \mathbb{R}^n\} y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))\} \\
&= \sup\{|o(|y|)|\colon y \in \varphi^{-1}(M \cap B_r(0))\} \\
&\overset{(1)}{\le} \sup\{|o(|y|)|\colon y \in B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n\} \\
&= o(r).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

Aufgabe 2. a) Sei $p \in M$ mit $p = (x, g(x))$ für ein $x \in U$. Analog zu A1 ist eine Karte von M gegeben als $\varphi\colon U \to M$ mit $\varphi(x) := \varphi(x, g(x))$ $\forall x \in U$. Dann ist $T_pM = \text{im} D\varphi(x)$. Im folgenden bezeichne $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Dann gilt für $x \in U$:

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} E_n \\ \nabla g(x)^t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Damit folgt

$$T_pM = \text{im} D\varphi(x) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \nabla g(x)^t a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Betrachte nun

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} -\nabla g(x) \\ 1 \end{pmatrix} t \colon t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist für $t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{pmatrix} -\nabla g(x) \\ 1 \end{pmatrix} t \cdot \begin{pmatrix} a \\ \nabla g(x) \cdot a \end{pmatrix} = t(-\nabla g(x) \cdot a + \nabla g(x) \cdot a) = 0.$$

Also ist $V \subseteq T_pM^\perp = N_pM$. Da außerdem $\dim V = 1 = \dim N_pM$ folgt $V = N_pM$.

b) Beh.: Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det(E_n + vv^t) = 1 + |v|^2$.

Beweis. Ergänze v zu einer OB mit $u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$(E_n + vv^t)v = E_nv + v|v|^2 = (1 + |v|^2)v.$$

Weiter gilt für $k \in \{2, \ldots, n\}$:

$$(E_n + vv^t)u_k = u_k + v\underbrace{v^tu_k}_{=0} = u_k,$$

da $v \perp u_k$. Also sind $v, u_2, \ldots, u_n$ Eigenvektoren von $E_n + vv^t$. Damit ist $\det(E_n + vv^t)$ das Produkt der Eigenwerte, also

$$\det(E_n + vv^t) = (1 + |v|^2)1^{n-1} = 1 + |v|^2. \tag{2}$$

□

Es gilt für $x \in U$:

$$D^t\varphi(x)D\varphi(x) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} E_n & \nabla g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ \nabla g(x)^t \end{pmatrix} = E_n + \nabla g(x)\nabla g(x)^t.$$

Es ist bereits (U, φ) vollständiges System von Karten für M. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_M f \,\mathrm{d}\mathscr{H}^n &\overset{\text{Def.}}{=} \int_U (f \circ \varphi)\sqrt{\det(D^t\varphi(x)D\varphi(x))}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(2)}{=} \int_U f(x, g(x))\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

c) Es gilt für $x \in U$:

$$\nabla g(x) = -6x.$$

Damit folgt

$$(F \cdot \nu)(x, g(x)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla g(x) \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}} = \frac{6x_1^2}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}}.$$

Es ist U beschränkt und $\sup_{x \in U} x_1^2 = 1 < \infty$, also $x_1^2 \in L^1(U)$. Also Transformationssatz mit Polarkoordinaten anwendbar. Außerdem sind r^2 und $\cos^2\varphi$ stetig, also R.-integrierbar mit Hauptsatz und Integrale stimmen auf kompakten Intervallen überein. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2 &= \int_U (F \cdot \nu)(x, g(x))\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_U 6x_1^2 \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Polarkoord}}{=} 6\int_{(0,1)} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &\overset{\mathscr{L}^n(\{0,1\})=0}{=} 6\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. a) Sei $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $\partial\Omega = S^{m-1} \in C^1$ (letzter Zettel). Dann ist $\nu = \mathrm{id} \in C^0(\Omega, S^{m-1})$ die äußere Normale, da für $x \in S^{m-1}$ und $t > 0$:

$$|x + t\nu(x)| = |x + tx| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(1+t))^2} = (1+t)|x| = 1 + t > 1.$$

Also $x + t\nu(x) \notin S^{m-1}$. Da die äußere Normale eindeutig ist, folgt id ist die äußere Normale von S^{m-1}.

b) Da Ω beschränkt, also auch $\partial\Omega$ und da $\partial\Omega$ abgeschlossen, nach Heine Borel kompakt und da $|x \cdot \nu(x)|$ stetig, ex. ein $S > 0$, s.d. $|x \cdot \nu(x)| \le S$ $\forall x \in \partial\Omega$. Da Da $\partial\Omega$ beschränkt, folgt $\mathscr{H}^{m-1}(\partial\Omega) < \infty$, insbesondere $x \cdot \nu \in L^1(\partial\Omega)$.

Es ist $x \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und

$$\operatorname{div} x = \sum_{i=1}^m \partial_i x_i = \sum_{i=1}^m 1 = m.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} m\mathscr{L}^m(\Omega) &= \int_\Omega m \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}\, x \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1}. \end{aligned}$$

Setze nun $\Omega := B_1(0) = B \setminus \partial\Omega$. Es ist $\mathscr{L}^m(\partial\Omega) = 0$, also folgt $\mathscr{L}^m(B) = \mathscr{L}^m(\Omega)$. Nun ist Ω offen und beschränkt mit $\partial\Omega = S^{m-1} \in C^1$. Mit (a) und (b) folgt nun

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{m-1}(S^{m-1}) &= \int_{S^{m-1}} \mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1} \\ &= \int_{S^{m-1}} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1} \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \int_{S^{m-1}} x \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1} \\ &\overset{\text{(b)}}{=} m\mathscr{L}^m(\Omega) \\ &= m\mathscr{L}^m(B). \end{aligned}$$

c) Es ist S^2 beschränkt und x_1^4 auf S^2 beschränkt, also $x_1^4 \in L^1(S^2)$. Damit folgt mit der selben Argumentation wie in 2c im letzten Schritt:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} x_1^4 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2 &= \int_{S^2} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathscr{H}^2 \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \int_{S^2} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2 \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{B_1(0)} \operatorname{div} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1(0)} 3x_1^2 \,\mathrm{d}x \\ &= 3 \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Da $\varphi, \psi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Damit sind $\nabla\varphi, \nabla\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Da $\nabla\varphi, \nu$ und $\nabla\psi$ stetig und Ω, also inbesondere $\partial\Omega$ beschränkt, ist $\nabla\varphi \cdot \nu, \nabla\psi \cdot \nu, \varphi\nabla\psi \cdot \nu, \psi\nabla\varphi \cdot \nu \in L^1(\partial\Omega)$.

a) Es gilt direkt

$$\int_\Omega \Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla\varphi) \,\mathrm{d}x \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}.$$

b) Es gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\partial_i\varphi(\partial_i\psi) = (\partial_i\psi)(\partial_i\varphi) + \varphi\partial_i\partial_i\psi = (\nabla\psi)_i(\nabla\varphi)_i + \varphi\partial_i(\nabla\psi)_i.$$

Damit folgt

$$\operatorname{div}(\varphi(\nabla\psi)) = \sum_{i=1}^n \partial_i\varphi(\partial_i\psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\Delta\psi.$$

Die Aussage folgt nun ganz analog zu (a) mit Satz von Gauß.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) &= \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi) - \operatorname{div}(\psi\nabla\varphi) \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \varphi\Delta\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi - \psi\Delta\varphi - \nabla\varphi\cdot\nabla\psi \\
&= \varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi.
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun ganz analog zu (a) mit Satz von Gauß.