

Korrolar 0.1 (2. Mittelwertsatz). Seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ R.-integrierbar. Dann ex. $\xi \in [a, b]$ s.d.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Beweis. o.B.d.A: f monoton fallend.

Definiere $\phi(t) := f(a) \int_a^t g(x)dx + f(b) \int_t^b g(x)dx$, $a \leq t \leq b$. Nach HDI $\phi(t)$ stetig.

$$\varphi(a) = f(b) \int_a^b g(x)dx \stackrel{f \text{ monoton fallend}}{\leq} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(a) \int_a^b g(x)dx = \varphi(b).$$

Nach ZWS $\exists \xi \in [a, b]$ s.d. $\varphi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. □

Bemerkung 0.2. Monotonie unverzichtbar. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $I = [-1, 1]$.

$$f(-1) \int_{-1}^\xi g(x)dx + f(1) \int_\xi^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 1dx = 2 \quad \forall \xi \in I$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \neq 2.$$

0.1 Integrationsformeln

Lemma 0.3 (Partielle Integration). $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. $(f \cdot g)'(x) = f' \cdot g + f \cdot g' \implies$

$$\int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g')(x)dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x)dx \stackrel{\text{HDI}}{=} (f \cdot g)(x) \Big|_a^b.$$

□

Beispiel 0.4.

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2(x) &= \int_a^b \cos x \cdot \cos x dx \\ &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b - \int_a^b (-\sin x) \sin x dx \\ &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b + \int_a^b (1 - \cos^2(x)) dx \\ \implies 2 \int_a^b \cos^2(x) dx &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b + \int_a^b dx. \end{aligned}$$

Lemma 0.5. Seien $[a, b], [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar mit $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann $F \circ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$(F \circ \varphi)' = (F'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = (F \circ \varphi)(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

□

Bemerkung 0.6. Formal: $x = \varphi(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \implies dx = \varphi'(t)dt$$

$$\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Beispiel 0.7.

$$\int_0^2 t \cdot \cos(\underbrace{t^2+t}_x)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(\underbrace{t^2+t}_{\varphi(t)}) \cdot 2tdt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)=1}^{\varphi(2)=5} \cos x dx.$$

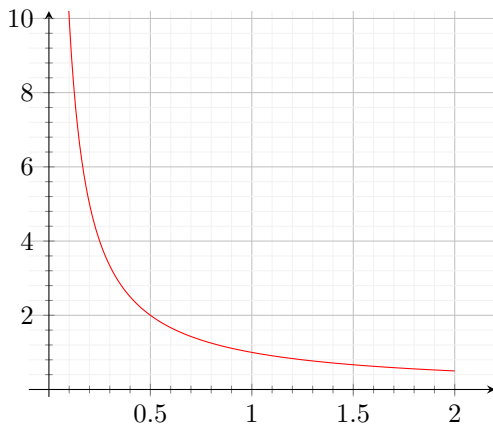
0.2 Uneigentliche Integrale

Satz 0.8 (Uneigentliches R.-Integral Typ 1). Sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ R.-integrierbar, d.h. f R.-integrierbar auf $\forall [a', b] \subset (a, b]$, aber nicht auf $[a, b]$.

Falls für alle Folgen $a_n \in (a, b]$ ex.

$$\lim_{a_n \searrow a} \int_{a_n}^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

Dann gilt: Dieser Limes ist von der Wahl der Folge a_n unabhängig und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$.



Beweis. Sei $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit

$$\lim_{a_n \searrow a} \int_{a_n}^b f(x)dx = A'.$$

Konstruiere Folge $\{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots\} = (a''_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Voraussetzungen

$$\exists \lim_{a''_n \searrow a} \int_{a''_n}^b f(x)dx = A''.$$

Alle Teilfolgen konvergenter Folgen, konvergieren gegen denselben Limes wie die Gesamtfolge $\implies A'' = A'$. □

Lemma 0.9. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ auf (a, b) aber nicht auf $[a, b]$ integrierbar.

Falls das uneigentliche Integral von $|f|$ auf $[a, b]$ ex., dann ex. das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0, \epsilon < b - a$. Betrachte

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx - \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx.$$

Integrale sind gleichmäßig beschränkt.

$$\frac{|f(x)| + f(x)}{2} > 0 \quad \forall x \text{ und } \frac{|f(x)| - f(x)}{2} > 0 \quad \forall x.$$

$\Rightarrow \int_{a+\epsilon}^b \dots dx$ monoton wachsend für $\epsilon \rightarrow 0$ und

$$\left| \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx \right| + \left| \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx \right| \leq \frac{4}{2} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| dx \leq 2 \int_a^b |f(x)| dx.$$

$\Rightarrow$ Für $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx.$$

□

Bemerkung 0.10. 1. Umkehrung der Aussage (d.h. f uneigentlich integrierbar $\Rightarrow |f|$ uneigentlich integrierbar) ist i.A. nicht richtig.

„einfache“ Konvergenz, d.h. $\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$.

„absolute“ Konvergenz / absolut uneigentlich integrierbar, d.h. $\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| dx$.

2. Sei $\int_a^b f(x) dx$ bei b uneigentlich und bei a nicht uneigentlich, dann definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt \quad \text{oder} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

falls der Limes existiert!

3. Sei $\int_a^b f(x) dx$ bei a und b uneigentlich, dann

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c^{b-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^c f(x) dx.$$

mit $c \in (a, b)$, falls beide Grenzwerte existieren, ist der Wert unabhängig von der Wahl von $c \in (a, b)$.

4. Uneigentliches Integral existiert $\iff$ uneigentliches Integral konvergiert.

Lemma 0.11 (wie bei Reihen). Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Einfache Konvergenz

Beispiel 0.12.

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{(x-a)^{\mu-1}} \Big|_{a+\epsilon}^b = \frac{1}{1-\mu} \left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\mu-1}} \right).$$

$\Rightarrow$ Integral ex. für $0 < \mu < 1$, ex. nicht für $\mu \geq 1$.

Satz 0.13 (Uneigentliche R.-Integrale Typ 2). Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion, d.h. f ist auf $[a, b'] \subset [a, \infty)$ integrierbar $\forall b'$.

Falls für alle Folgen $b_n \in [a, +\infty)$ der Limes

$$\lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx =: \int_a^\infty f(x) dx.$$

existiert, dann ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und heißt uneigentliches Integral von f über $[a, \infty)$.

Lemma 0.14. Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und es existiere $\int_a^\infty |f(x)| dx$. Dann ex. $\int_a^\infty f(x) dx$ und es gilt

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$