

Heute: Längstes deutsches Wort! Hi Josua :D

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben“ meint Kostina.

Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal. Ab jetzt: n statt k .

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für $0 < a < 1$.

Definiere Menge $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$

$M \neq \emptyset$, weil $\frac{1}{2}a \in M$. M ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da $\mathbb{R}$ vollständig $\implies \exists \sup M =: x$.

Zu zeigen: $x^n = a$ Annahme: $x^n < a$. Wegen $(x+1) \notin M$ gilt $(x+1)^n > a$. Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned}(x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\ &< x^n + \tau \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\ &\stackrel{\text{Def. } \tau}{=} x^n + (a - x^n) = a.\end{aligned}$$

$\implies$

$$(x+\tau)^n < a \implies (x+\tau) \in M.$$

und damit:

$$x+\tau > x \quad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}$)

Annahme: $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für $\tau := \frac{x^n - a}{nx^n}$. ($0 < \tau < \frac{x^n - a}{x^n} < 1$) Damit:

$$\begin{aligned}(x - \tau x)^n &= x^n(1 - \tau)^n \geq x^n(1 - n\tau) \\ &= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n}\right) = a.\end{aligned}$$

$\implies$ Für $y \in M$ gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\implies$

$$0 < (x - \tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^n (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$$\implies x - \tau x - y > 0$$

$\implies y < x - \tau x < x \implies x - \tau x < x$ eine obere Schranke von M . Widerspruch zu $x = \sup M$

(Formel: $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$)

□

Bemerkung 1 (Ungleichung von Bernoulli). Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n.$$

Definition 1 (Allgemeine rationale Potenzen). $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := \left(\sqrt[s]{a}\right)^r.$$

Bemerkung 2. • Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$(\sqrt[s]{a})^r = (a^{\frac{1}{s}})^r = a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ **immer** die positive k -te Wurzel verstanden.
 $\implies$ Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist falsch.
 Korrekt: $\sqrt{a^2} = |a|$

Die Gleichung $x^2 = a$ hat zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

Bemerkung 3 (Reelle Potenzen). $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$ - ?

$\exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow r, q_n \in \mathbb{Q}$, damit:

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

Beispiel 1. $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{q_n}, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \dots$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$\begin{aligned} I_1 &= [1.4; 1.5] \\ I_2 &= [1.41; 1.42] \\ I_3 &= [1.414; 1.415] \\ I_n &= [r_n, s_n]. \end{aligned}$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}.$$

Alternative Definition über $\exp$ und $\ln$

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

0.1 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 2 (Mächtigkeit). Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich“, wenn eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow$ Echte Teilmenge von A existiert. Dann $|A| = \infty$.

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)“, sonst „überabzählbar“.

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

Beispiel 2. • $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dann $|A| = 3$