

Aufgabe 1. Es sei K Körper, M eine Menge und $m_0 \in M$ ein fest gewähltes Element. In $V = \text{Abb}(M, K)$ betrachten wir die Teilmengen $U = \{f \in V \mid f(m_0) = 0\}$ und $W = \{f \in V \mid \forall x, y \in M: f(x) = f(y)\}$

Zunächst: K ist K -Vektorraum mit $(K, +, 0)$. Damit wird $V = \text{Abb}(M, K)$ zum Vektorraum.

a) Beh.: $U \subset V$ ist Untervektorraum.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in U, a \in K$ beliebig. Zu zeigen: $(f_1 + f_2)(m_0) = 0$ und $(af_1)(m_0) = 0$.

$$(f_1 + f_2)(m_0) = f_1(m_0) + f_2(m_0) = 0 + 0 = 0.$$

$$\implies (f_1 + f_2) \in U.$$

$$(af_1)(m_0) = af_1(m_0) = a \cdot 0 = 0.$$

$$\implies (af_1) \in U. \quad \square$$

Beh.: $W \subset V$ ist Untervektorraum

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in W, a \in K$ und $x, y \in M$ beliebig. Zu zeigen: $(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(y)$ und $(af_1)(x) = (af_1)(y)$.

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(y) + f_2(y) = (f_1 + f_2)(y).$$

$$\implies (f_1 + f_2) \in W.$$

$$(af_1)(x) = af_1(x) = af_1(y) = (af_1)(y).$$

$$\implies (af_1) \in W. \quad \square$$

b) Beh.: $U \cap W = \{0\}$

Beweis. Sei $f \in U \cap W$ beliebig:

$$\begin{aligned} \forall m \in M: f(m) &= f(m_0) \wedge f(m_0) = 0 \\ \implies \forall m \in M: f(m) &= 0 \\ \implies f &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

c) Beh.: $V = U + W$

Beweis. Sei $f \in V$ beliebig.

Zu zeigen: $\exists u \in U, \exists w \in W: f = u + w$

Dann wähle $u \in U$, s.d.

$$u(m) = \begin{cases} f(m) - f(m_0) & m \neq m_0 \\ 0 & m = m_0 \end{cases}.$$

und $w \in W$, s.d.

$$w(m) = f(m_0) \quad \forall m \in M.$$

Damit folgt:

$$f(m) = u(m) + w(m) = \begin{cases} f(m) - f(m_0) + f(m_0) = f(m) & m \neq m_0 \\ 0 + f(m_0) = f(m_0) & m = m_0 \end{cases}. \quad \square$$

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, $U = \text{Abb}(\{0, 1, \dots, n\}, K)$ und $V = \text{Abb}(\{0, 1, \dots, n+1\}, K)$.

$$\psi: V \rightarrow K^{n+2}$$

$$f \mapsto (f(0), f(1), \dots, f((n+1)))$$

$$\partial: V \rightarrow U$$

$$f \mapsto (i \mapsto (i+1) \cdot f(i+1)).$$

a) Beh.: ψ ist linear.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ beliebig.

$$\begin{aligned}\psi(v_1 + v_2) &= ((v_1 + v_2)(0), (v_1 + v_2)(1), \dots, (v_1 + v_2)(n+1)) \\ &= (v_1(0) + v_2(0), v_1(1) + v_2(1), \dots, v_1(n+1) + v_2(n+1)) \\ &= (v_1(0), v_1(1), \dots, v_1(n+1)) + (v_2(0), v_2(1), \dots, v_2(n+1)) \\ &= \psi(v_1) + \psi(v_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(av_1) &= (av_1(0), av_1(1), \dots, av_1(n+1)) \\ &= a(v_1(0), v_1(1), \dots, v_1(n+1)) \\ &= a\psi(v_1).\end{aligned}$$

□

Beh.: ∂ ist linear.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ und $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ beliebig.

$$\begin{aligned}\partial(v_1 + v_2)(i) &= (i+1) \cdot (v_1 + v_2)(i+1) \\ &= (i+1) \cdot (v_1(i+1) + v_2(i+1)) \\ &= (i+1)v_1(i+1) + (i+1)v_2(i+1) \\ &= \partial(v_1)(i) + \partial(v_2)(i).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial(av_1)(i) &= (i+1)(av_1)(i+1) \\ &= a(i+1)v_1(i+1) \\ &= a\partial(v_1)(i).\end{aligned}$$

□

b) Beh.: ψ ist Isomorphismus.

Beweis. Zu zeigen: ψ ist bijektiv.

Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\psi(v_1) = \psi(v_2)$. Dann

$$\begin{aligned}\psi(v_1) &= (f_1(0), f_1(1), \dots, f_1(n+1)) = (f_2(0), f_2(1), \dots, f_2(n+1)) = \psi(v_2) \\ \implies f_1(k) &= f_2(k) \quad \forall k \in \{0, \dots, n+1\} \\ \implies f_1 &= f_2.\end{aligned}$$

$\implies \psi$ ist injektiv.

Sei $c = (c_0, \dots, c_{n+1}) \in K^{n+2}$, dann ex. ein $f \in V$, s.d.

$$\begin{aligned}f(k) &= c_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n+1\} \\ \implies \psi(f) &= c.\end{aligned}$$

$\implies \psi$ ist surjektiv.

□

c) Beh.: ∂ surjektiv $\iff \text{char}K \notin \{2, \dots, n+1\}$

Beweis. Damit ∂ surjektiv ist, muss für alle $u \in U$ ein $v \in V$ existieren, s.d. $\partial(v) = u$.

Sei $u \in U, k \in \{0, \dots, n\}$ beliebig, dann muss für v gelten:

$$\partial(v)(k) = (k+1) \cdot v(k+1) = u(k).$$

Dies ist genau dann wohldefiniert, wenn $k+1 \neq 0$, denn genau dann ex. ein Inverses zu $k+1$ und damit:

$$v(k+1) = (k+1)^{-1} \cdot u(k).$$

Bleibt zu zeigen: $\text{char}K \notin \{2, \dots, n+1\} \iff k+1 \neq 0 \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} & k+1 \neq 0 \\ & \stackrel{k>0}{\iff} k+1 \neq \text{char}K \\ & \stackrel{0 \leq k \leq n}{\iff} \text{char}K = 0 \vee \text{char}K > n+1 \\ & \iff \text{char}K \notin \{2, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

□

d) Beh.: $\psi(\ker \partial) = \left\{ (c, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1\text{-mal}}) \mid c \in K \right\}$

Beweis. Zunächst: $\ker \partial$.

Damit $r \in V$ im Kern von ∂ liegt, muss gelten: $\partial(r)(k) = 0 \forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \partial(r)(k) &= (k+1) \cdot r(k+1) \\ &\stackrel{k+1 \neq 0}{\implies} r(k+1) = 0. \end{aligned}$$

Damit: $r(k) = 0 \forall k \in \{1, \dots, n+1\}$.

$$\begin{aligned} \psi(r) &= (r(0), r(1), \dots, r(n+1)) \\ &= (c, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1\text{-mal}}) \forall c \in K. \end{aligned}$$

Das heißt:

$$\psi(\ker \partial) = \left\{ (c, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1\text{-mal}}) \mid c \in K \right\}.$$

□

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und U, V zwei K -Vektorräume.

a) Beh.: Ist $f: U \rightarrow V$ linear, ist auch die duale Abbildung $f^*: V^* \rightarrow U^*$ linear.

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $a \in K$ beliebig.

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2) &= (\varphi_1 + \varphi_2) \circ f = \varphi_1 \circ f + \varphi_2 \circ f = f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2) \\ f^*(a\varphi_1) &= (a\varphi_1) \circ f \stackrel{\varphi_1 \text{ linear}}{=} a((\varphi_1) \circ f) = af^*(\varphi_1). \end{aligned}$$

□

b) Beh.: Die Auswertungsabbildung $\text{ev}: U \rightarrow (U^*)^*$, mit

$$u \mapsto (f \mapsto f(u))$$

ist linear.

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in U$, $a \in K$ und $f \in U^*$ beliebig.

$$\begin{aligned} \text{ev}(u_1 + u_2)(f) &= f(u_1 + u_2) \stackrel{f \text{ linear}}{=} f(u_1) + f(u_2) = \text{ev}(u_1)(f) + \text{ev}(u_2)(f) \\ \text{ev}(au_1)(f) &= f(au_1) \stackrel{f \text{ linear}}{=} af(u_1) = a \cdot \text{ev}(u_1)(f). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper und U, V zwei K -Vektorräume.

a) Die Abbildung $*$: $\text{Hom}_K(U, V) \rightarrow \text{Hom}_K(V^*, U^*)$ ist linear.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in \text{Hom}_K(U, V)$, $\varphi \in V^*$ und $a \in K$ beliebig.

$$\begin{aligned} *(f_1 + f_2)(\varphi) &= (f_1 + f_2)^*(\varphi) = \varphi \circ (f_1 + f_2) = \varphi \circ f_1 + \varphi \circ f_2 = *(f_1)(\varphi) + *(f_2)(\varphi) \\ *(af_1)(\varphi) &= (af_1)^*(\varphi) = \varphi \circ (af_1) = a(\varphi \circ f_1) = a*(f_1)(\varphi). \end{aligned}$$

□

b) Ist $f: U \rightarrow V$ linear und surjektiv, so ist $f^*: V^* \rightarrow U^*$ injektiv.