

1 Funktionen und Stetigkeit

Definition 1.1 (Funktion). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Eine reellwertige oder komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für zwei Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) definieren wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

.

1.1 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 1.2 (Berührpunkt). Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D , falls in jeder δ -Umgebung von a , d.h.

$$U_\delta(a) :=]a - \delta, a + \delta[= (a - \delta, a + \delta).$$

mindestens ein Punkt von D liegt, d.h.

$$]a - \delta, a + \delta[\cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

Beispiel 1.3. 1. $a \in D \implies a$ Berührpunkt von D

2. $D =]0, 1[$, 0 ist Berührpunkt von D , denn $\forall \delta > 0 \quad]-\delta, \delta[\cap]0, 1[\neq \emptyset$, da $\delta > 0$

3. $D = [1, 2]$, 0 ist kein Berührpunkt von D , denn z.B. für $\delta = \frac{1}{2}$:

$$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap [1, 2] = \emptyset.$$

Lemma 1.4 (Äquivalente Definition von Berührpunkten). a ist ein Berührpunkt von $D \iff \exists$ Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Beweis. durch Behauptung □

Definition 1.5 (Grenzwert bei Funktionen). 1. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 sei ein Berührpunkt von D . f hat in x_0 den Grenzwert (oder limes), $y_0 \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D, |x - x_0| < \delta.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

y_0 ist eindeutig bestimmt.

y_0 kann von D abhängig sein und man schreibt daher zur Verdeutlichung ein $x \in D$ darunter.

2. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D \cap]x_0, \infty[$. Dann hat f in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y_0 hat, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y_0.$$

3. Sei x_0 ein Berührungspunkt von $D \cap]-\infty, x_0[$. Dann hat f in x_0 den linksseitigen Grenzwert y_0 , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0.$$

Beispiel 1.6 (Heaviside Funktion). $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, def. durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Für $x_0 > 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 1$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{x_0}{2} > 0$. Dann gilt

$$|H(x) - 1| = 0 < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap]x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}[.$$

□

Analog finden wir, dass für $x_0 < 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ existiert nicht!

Beweis. Angenommen: $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = y_0$.

Dann wählen wir $\epsilon = \frac{1}{4}$, dann ex. $\delta > 0$ mit

$$|H(x) - y_0| < \frac{1}{4} \quad \forall x \text{ mit } x \in]-\delta, \delta[.$$

$$\implies 1 = |H(-\delta) - H(\delta)| \leq |H(-\delta) - y_0| + |y_0 - H(\delta)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ Widerspruch!}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} H(x) \text{ existiert nicht.}$$

□

Es gibt $\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} H(x) = 1$, weil

$$|H(x) - 0| = 0 \quad \forall x \in]-\delta, 0[$$

$$|H(x) - 1| = 0 \quad \forall x \in]0, \delta[.$$

Lemma 1.7 (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe).

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

, d.h.

$$R_{n+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $R_{n+1}(x)$ gilt

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \forall |x| \leq \frac{N+2}{2}, N \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^3 + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{\epsilon}{4}$. Dann gilt $\forall x \in] - \frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4} [$, wobei O.B.d.A. $\frac{\epsilon}{4} < 1$, dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_{0+1}| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Lemma 1.9 (Folgenkriterium). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Berührungspunkt von D . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

Beweis. • „ $\implies$ “: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$. Sei also $\epsilon > 0$, nach Def. von $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert ein $\delta > 0$, s.d.

$$|f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Zu $\delta > 0$ ex. ein Index $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_\delta$.

$$\implies |f(x_n) - y_0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\delta$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

• „ $\impliedby$ “: Zu zeigen.: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D: |x - x_0| < \delta.$$

Angenommen das gilt nicht.

Dann $\exists \epsilon_0 > 0$, s.d. $\forall \delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - y_0| \geq \epsilon_0$.

$\implies$ Für alle $n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0$

$\implies$ Diese $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y_0 . Widerspruch!

$\implies$ Annahme ist falsch $\implies$ Behauptung

□

1.2 Stetigkeit

Definition 1.10 (Stetigkeit). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, und $a \in D$. f heißt stetig im Punkt a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

f heißt stetig in D , falls f stetig in a ist $\forall a \in D$.

Äquivalente Definitionen

Definition 1.11 (Stetigkeit per ϵ / δ Argument). f ist stetig in $a \iff$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Definition 1.12 (Stetigkeit mit Folgen). f ist stetig in $a \iff$

$$\forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Definition 1.13 (Stetigkeit mit Bild). f ist stetig in $a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$f(U_\delta(a)) \subset]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[= U_\epsilon(f(a)).$$

Beispiel 1.14. (1) Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Konstante Fkt.: Wähle δ beliebig, da

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \implies 0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bei der Identität: Wähle $\delta := \epsilon > 0$, denn

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - a| < \delta = \epsilon \implies |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon.$$

(2) $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Das folgt aus Rechenregeln für Folgen,

$$f(x_n) \rightarrow f(a), n \rightarrow \infty \implies |f(x_n)| \rightarrow |f(a)|.$$

(3) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0.$$

Aus $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = 1$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \lim_{x_n \rightarrow a} (\exp(a) + \exp(x_n - a)) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a).$$