# 1 Grundlagen

## 1.1 Vollständige Induktion

**Beispiel 1.** Betrachte die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Beweis.* Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1.$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

**Definition 1.** Seien $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$
$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$. Falls $m > n$, dann $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$

**Beispiel 2.** Definiere rekursiv für $x \in \mathbb{R}$: $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$ Betrachte

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summenformel.

*Beweis.* Induktionsanfang für $n = 1$:

$$1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \qquad = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1-x)(x^{n+1})}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

□

*Alternativbeweis mit Teleskop-Summe.*

$$\begin{aligned} 1 - x^{n+1} &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \ldots - x^n + x^n - x^n + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x \end{aligned}$$

.

□

Als Anwendung der geometrischen Summenformel ergeben sich nützliche Formeln, z.B. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

*Beweis.* Für $a = 0$ und $a = b$ stimmt die Formel offenbar.
Betrachte geometrische Reihe mit $x := \frac{b}{a} \neq 1$

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n = 1 - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = (1 - \frac{b}{a})\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{-k} a^{n-1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

□

## 1.2 Elemente der Kombinatorik

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ rekursiv definiert durch:

$$1! := 1 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1).$$

Per Definition $0! := 1$

**Satz 1** (Permutationen)**.** Die Anzahl aller Anordnungen (oder Permutationen) von $n \in \mathbb{N}$ Elementen ist $n!$.

*Beweis.* Induktionsanfang:

$n = 1$: Eine Anordnung 1
$n = 2$: Zwei Anordnungen 12, 21

Induktionsschritt $n \to n+1$: Anzahl von Anordnungen der Elemente $1, \ldots, n+1$, die das Element $(n+1)$ auf Platz 1 hat bei beliebiger Anordnung der anderen Elemente nach Induktionsannahme ist $n!$. Für jedes der $n+1$ Plätze ergeben sich wieder $n!$ Anordnungen, d.h. insgesamt: $n!(n+1) = (n+1)!$ □

**Definition 2** (Binomialkoeffizient)**.** Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$n \geq k \geq 1 : \binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$
$$k = 0 : \binom{n}{0} := 1$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-Elementigen Teilmengen einer n-Elementigen Menge, z.B.: Lotto $\binom{49}{6} = 13.983.816$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\end{aligned}$$

.

Es folgt $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

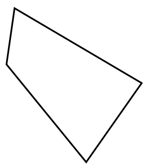

Abbildung 1: figur1