

Sorry für die Verspätung..

Rechenregeln für komplexe Zahlen (siehe Übungsblatt)

Reelle Zahlen: $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

Polardarstellung

(a)

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = |z|.$$

$$\text{Bsp.: } i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) Definiere $e^{iy} := \cos y + i \sin y$ $y \in \mathbb{R}$. Es folgt eine *Exponentialdarstellung*.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

Satz 1 (Vorteil der Exponentialdarstellung). Für $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad k = 1, 2 \text{ gilt.}$$

(a) $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(d) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

insbesondere gilt die Formel von de Moivre:

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Beweis. (a) $\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-\varphi}$

(b)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i((\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

Bemerkung 1 (Beobachtungen). 1. $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. durch Behauptung.

□

$$2. e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Satz 2 (n -te Wurzel in $\mathbb{C}$). Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq w = re^{i\varphi}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k) \cdot \frac{1}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beweis. Sei $z = \rho e^{i\psi}$. Dann:

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\psi} \stackrel{!}{=} r e^{i\varphi} = w \\ \Leftrightarrow \rho^n &= r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \rho &= \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Betrachte: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k = 0, 1, \dots, n-1$

1. Alle z_k sind paarweise verschieden (klar).
2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung $z^n = w$ und $z = |z| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$. Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$.

Weiterhin ist $n\psi = \varphi + 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (wegen $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$), dann $\psi = \frac{\varphi}{n} + l \frac{2\pi}{n}$.

Teile l durch n mit Rest: $l = k + s \cdot n$.

$$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Dann

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

$$\Rightarrow z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$$

$$\Rightarrow \text{Alle Lösungen gefunden}$$

□

Bemerkung 2 (Geometrische Interpretation). Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis mit Radius $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Im Fall $w = 1$ heißen z_k die n -ten Einheitswurzeln.

Beispiel 1. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} &\left\{ e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$