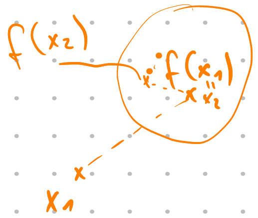
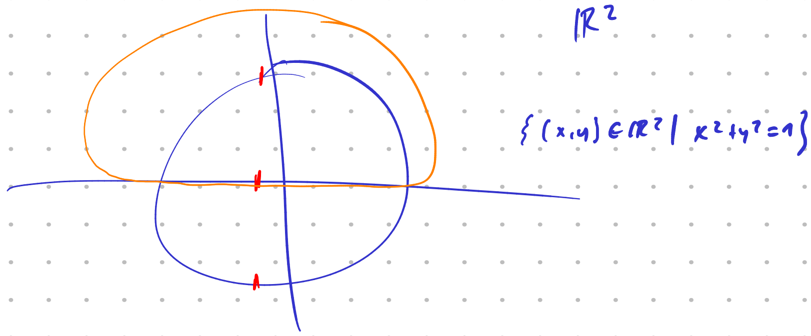
VL Woche 12.5.





- Banachscher Fixpunktsatz: (M,d) vollst. metr. Raum und $f: M \to M$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann besitzt

  $\exists!\, z \in M: \ f(z) = z$

  Es gilt weiter: Für $x_0 \in M$ bel. konvergiert die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen denselben Punkt $z \in M$ mit $f(z) = z$.

- $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to V$ C^1-Diffeo $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ f bijektiv und stetig diff'bar und $f^{-1}: V \to U$ stetig diff'bar.

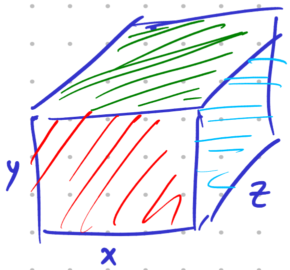
  Dann gilt: $J_{f^{-1}}(f(x)) = \left(J_f(x)\right)^{-1} \quad \forall x \in U.$

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^n$ lokaler Diffeo $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ Jeder Punkt $x \in D$ besitzt offene Umgebung $U \subseteq D$, s.d. $f|_U : U \to f(U)$ Diffeom.

A1| Quader mit Volumen V_0 und Kanten $x,y,z \in \mathbb{R}_+$.

Volumen $V(x,y,z) = xyz = V_0$

Oberfläche $O(x,y,z) = 2\left(xy + (x+y)z\right)$



Ges: Lokale Extrema von $O(x,y,z)$ bei festem Volumen V_0.

$V_0 = xyz \implies z = \dfrac{V_0}{xy}$

Damit folgt $O(x,y) = 2\left(xy + \dfrac{(x+y)}{xy} V_0\right)$

$$= 2\left(xy + \frac{V_0}{y} + \frac{V_0}{x}\right)$$

$$\frac{\partial O}{\partial x} = 2\left(y - \frac{V_0}{x^2}\right) \qquad \frac{\partial O}{\partial y} = 2\left(x - \frac{V_0}{y^2}\right)$$

- $\dfrac{\partial O}{\partial x} = 0 \iff 2\left(y - \dfrac{V_0}{x^2}\right) = 0 \iff y = \dfrac{V_0}{x^2}$
- $\dfrac{\partial O}{\partial y} = 0 \iff 2\left(x - \dfrac{V_0}{y^2}\right) = 0 \iff x = \dfrac{V_0}{y^2}$

$\iff \begin{cases} y = V_0 \dfrac{y^4}{V_0^2} \iff y = \sqrt[3]{V_0} \\ x = \dfrac{V_0}{y^2} \iff x = \sqrt[3]{V_0} \end{cases}$

D.h. einzige Lösung von $\nabla O = 0$ ist $(\sqrt[3]{V_0}, \sqrt[3]{V_0})$.

Hessematrix bestimmen:
$$H_O(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V_0}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4V_0}{y^3} \end{pmatrix}$$

Zu prüfen ist Definitheit von $H_O(\sqrt[3]{V_0}, \sqrt[3]{V_0}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Hauptminorenkrit: $\det(4) = 4 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$

$\implies$ pos. definit

$\implies$ bei $x = \sqrt[3]{V_0} = y$ liegt lokales Minimum von O vor.

Nun mit $z = \dfrac{V_0}{xy} = \dfrac{V_0}{\sqrt[3]{V_0}^2} = \sqrt[3]{V_0}$ folgt:

Oberfläche minimal für $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$.

Ohne vorgegebenes Volumen V_0 gibt es keine lokalen Extrema:

$$O(x,y,z) = 2(xy + (x+y)z)$$

$$\frac{\partial O}{\partial x} = 2(y+z) \quad \frac{\partial O}{\partial y} = 2(x+z) \quad \frac{\partial O}{\partial z} = 2(x+y)$$

Nun $\nabla O = 0 \iff \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ x = -y \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ x = -x \end{cases} \iff \{ \underline{x = y = z = 0 \notin \mathbb{R}^+}$

A2 a) $f_1(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^4$

$$\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y^2 \\ 4xy + 4y^3 \end{pmatrix} \quad \nabla f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 12y^2 \end{pmatrix} \quad H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{EW: } \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Hessematrix liefert keine Aussage, aber: $f_1(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x+y^2)^2 \geq 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Dieses Minimum ist nicht strikt da für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$.

Dann ist $f_1(-\delta^2, \delta) = (-\delta^2 + \delta^2)^2 = 0$ und $(-\delta^2, \delta) \in B_\varepsilon(0)$.

b) $f_2(x,y) = x^4 + y^2$

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{EW: } \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 2$$

$\Rightarrow$ Hessematrix liefert keine Aussage

aber: $f_2(x,y) = x^4 + y^2 \geq 0 = f_2(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Außerdem strikt, denn $f_2(x,y) = 0 \iff x^4 + y^2 = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$.

c) $f_3(x,y) = x^3 + y^2$

$$\nabla f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla f_3(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H_{f_3}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{EW: } \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 2$$

$\Rightarrow$ Hessematrix liefert keine Aussage

Es gilt $\forall \varepsilon > 0$ ist $\begin{pmatrix} \varepsilon/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon/2 \\ 0 \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(0)$

aber $f_3(\varepsilon/2, 0) = (\varepsilon/2)^3 > 0 > -(\varepsilon/2)^3 = f_3(-\varepsilon/2, 0)$

also in $(0,0)$ kein lokal. Extremum.