

Auflösung unbeschränkter Komplexe

Christian Merten

29. März 2022

1 Einleitung

2 Derivierte Kategorien und abgeleitete Funktoren

3 Grundlagen

Wir benötigen im Folgenden mehrmals eine bestimmte Bedingung an inverse Systeme in $\mathcal{A}b$. Wir sagen ein inverses System $(M_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ genügt Bedingung (R), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $M_1 = 0$
- (ii) Für $n > 1$ ist die Abbildung $M_n \rightarrow M_{n-1}$ surjektiv.

Lemma 3.1. Sei I eine Indexmenge, die Bedingung (I) genügt und seien $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$, $(C_i)_{i \in I}$ und $(D_i)_{i \in I}$ inverse Systeme in $\mathcal{A}b$, die (R) erfüllen und seien

$$(A_i)_{i \in I} \xrightarrow{f_i} (B_i)_{i \in I} \xrightarrow{g_i} (C_i)_{i \in I} \xrightarrow{h_i} (D_i)_{i \in I} \quad (1)$$

Morphismen von inversen Systemen mit $g_i \circ f_i = 0 = h_i \circ g_i$ für $i \in I$ und sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

der Limes von (1). Für $i \in I$ mit $i > I_{\min}$ seien A'_i , B'_i , C'_i und D'_i die jeweiligen Kerne der Übergangsabbildungen $A_i \rightarrow A_{i-1}$, $B_i \rightarrow B_{i-1}$, $C_i \rightarrow C_{i-1}$ und $D_i \rightarrow D_{i-1}$.

Sei weiter $j \in I$, s.d. für alle $i > j$ die Folge

$$A'_i \longrightarrow B'_i \longrightarrow C'_i \longrightarrow D'_i$$

exakt ist.

Dann ist die natürliche Abbildung

$$\ker g / \text{im } f \longrightarrow \ker g_j / \text{im } f_j$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Durch Umbenennung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $I = \mathbb{N}$. Sei $j \in \mathbb{N}$ mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & \text{im } f & \longrightarrow & \ker g & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A_j & \xrightarrow{f_j} & \text{im } f_j & \longrightarrow & \ker g_j & \longrightarrow & B_j & \xrightarrow{g_j} & C_j & \xrightarrow{h_j} & D_j \\
 \uparrow p_A & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow p_B & & \uparrow p_C & & \uparrow p_D \\
 A_{j+1} & \xrightarrow{f_{j+1}} & \text{im } f_{j+1} & \longrightarrow & \ker g_{j+1} & \longrightarrow & B_{j+1} & \xrightarrow{g_{j+1}} & C_{j+1} & \xrightarrow{h_{j+1}} & D_{j+1} \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \ker p_{A_{j+1}} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \ker p_{B_{j+1}} & \longrightarrow & \ker p_{C_{j+1}} & \longrightarrow & \ker p_{D_{j+1}} & &
 \end{array} \quad (2)$$

Injektivität: Sei $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ker g$, sodass $b_j \in \text{im } f_j$. Dann existiert ein $a_j \in A_j$, sodass $f_j(a_j) = b_j$. Da p_A surjektiv, existiert ein $x \in A_{j+1}$, sodass $p_A(x) = a_j$. Sei $y = f_{j+1}(x)$. Weil (2) kommutativ, ist $p_B(y) = b_j$. Da $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein kompatibles System ist, gilt zudem $p_B(b_{j+1}) = b_j$. Also ist $b_{j+1} - y \in \ker p_B$. Weil $y, b_{j+1} \in \ker g_{j+1}$, existiert aufgrund der Exaktheit der unteren Zeile ein $\tilde{x} \in \ker p_A$, sodass $f_{j+1}(\tilde{x}) = b_{j+1} - y$. Nun setze $a_{j+1} := \tilde{x} + x$. Dann ist $f_{j+1}(a_{j+1}) = b_{j+1}$ und $p_A(a_{j+1}) = a_j$, denn

$\tilde{x} \in \ker p_A$. Konstruiere so induktiv eine kompatible Familie $(a_i)_{i \geq j}$ mit $f(a_i) = (b_i)_{i \geq j}$. Für $i < j$ setze $a_i := p_{A_{i+1}}(a_{i+1})$. Die Kommutativität von (2) liefert dann ein kompatibles System $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $f(a_i) = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Surjektivität: Sei $b \in \ker g_j$. Weil p_B surjektiv, existiert dann ein $y \in B_{j+1}$, sodass $p_B(y) = b$. Sei $z = g_{j+1}(y)$. Aufgrund der Kommutativität von (2) ist dann $p_C(z) = p_C(g_{j+1}(y)) = g_j(p_B(y)) = g_j(b) = 0$, also folgt $z \in \ker p_C$. Da $h_{j+1} \circ g_{j+1} = 0$ folgt $h_{j+1}(z) = h_{j+1}(g_{j+1}(z)) = 0$. Da die untere Zeile exakt ist, existiert nun ein $\tilde{y} \in \ker p_B$, s.d. $g_{j+1}(\tilde{y}) = z$. Also ist $y - \tilde{y} \in \ker g_{j+1}$ und $p_B(y - \tilde{y}) = p_B(y) = b$. Setze $b_{j+1} := y - \tilde{y}$ und $b_j := b$. Dann konstruiere induktiv eine kompatible Familie $(b_i)_{i \geq j}$ mit $b_i \in \ker g_i$. Für $i < j$ setze wie oben $b_i := p_{B_{i+1}}(b_{i+1})$. Erneut liefert die Kommutativität von (2) ein kompatibles System $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ker g$ mit $bg = b$. $\square$

4 K-injektive und K-projektive Auflösungen

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine feste abelsche Kategorie und $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Komplexkategorie mit Komplexhomomorphismen bis auf Homotopie als Abbildungen.

Definition 4.1 (K-injektiv bzw. K-projektiv). Ein Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn für alle $S^\bullet \in \mathcal{K}$, der Komplex $\text{Hom}^\bullet(S^\bullet, X^\bullet)$ (bzw. $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, S^\bullet)$) exakt ist.

Bemerkung 4.2. Mit ?? ist $X^\bullet$ genau dann K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn $\forall S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt: $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet[i], X^\bullet) = 0$ (bzw. $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[i]) = 0$) $\forall i \in \mathbb{Z}$. Da Verschieben Exaktheit erhält folgt also

$$X^\bullet \text{ K-projektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt}$$

$$X^\bullet \text{ K-injektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, X^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt.}$$

4.1 Elementare Eigenschaften von K-injektiven und K-projektiven Komplexen

Bemerkung 4.3. Ein exakter K-projektiver oder K-injektiver Komplex $X^\bullet$ ist zusammenziehbar, d.h. ist nullhomotop.

Beweis. Betrachte $\text{id}_{X^\bullet} \in \text{Hom}^0(X^\bullet, X^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, X^\bullet) = \text{H}^0 \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, X^\bullet) = 0$. Also ist $\text{id}_{X^\bullet} = 0$ und damit $X^\bullet = 0$ in $\mathcal{K}$. $\square$

Satz 4.4. Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $X^i = 0 \forall i \neq 0$. Dann ist $X^\bullet$ K-injektiv (bzw. K-projektiv) genau dann wenn A^0 injektiv (bzw. projektiv) in $\mathcal{A}$ ist.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei $X^\bullet$ K-projektiv und $S^\bullet = 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$. Sei $f: X^0 \rightarrow P$. Das induziert einen Komplexhomomorphismus $X^\bullet \rightarrow S^\bullet$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow k & \downarrow f & \swarrow & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist dieser nullhomotop, d.h. es existiert $k: X^0 \rightarrow N$, s.d. $f = vk$. Also ist $\text{Hom}(X^0, N) \rightarrow \text{Hom}(X^0, P)$ surjektiv und damit X^0 projektiv.

„ $\impliedby$ “: Sei nun X^0 projektiv, $S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und $f: X^\bullet \rightarrow S^\bullet$ Komplexhomomorphismus. Dann betrachte

$$\text{diag.}$$

Da X^0 projektiv, existiert $k^0: A^0 \rightarrow S^{-1}$, s.d. $f^0 = d^{-1}k^0$. $\square$

Satz 4.5. (i) $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist K-projektiv (bzw. K-injektiv) genau dann wenn $X^\bullet[1]$ dies ist.

(ii) Falls zwei Punkte eines ausgezeichneten Dreiecks in $\mathcal{K}$ K-projektiv (bzw. K-injektiv) sind, dann auch der dritte.

Beweis. (i) Das folgt, daraus dass für $X^\bullet, S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt: $S^\bullet$ exakt $\iff S^\bullet[-1]$ exakt und

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[-1]) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet).$$

(ii) Sei $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ ein ausgezeichnetes Dreieck mit $X^\bullet, Y^\bullet$ K-projektiv und $S^\bullet$ exakt. Nach Anwenden von $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(-, S^\bullet)$?? ist dann

$$\underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet)}_{=0} \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(Z^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(Y^\bullet, S^\bullet)}_{=0}$$

exakt und die äußeren Terme 0 nach Voraussetzung und (i). Also folgt $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(Z^\bullet, S^\bullet) = 0$, also $Z^\bullet$ K-projektiv. Der allgemeine Fall folgt nun mit ??.

□

Satz 4.6. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

(i) $P^\bullet$ K-projektiv

(ii) Für $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ Quasiisomorphismus in $\mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, X^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, Y^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

(iii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck und $C_f^\bullet$ ist nach ?? exakt. Anwenden von $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, -)$ liefert mit ?? eine exakte Folge:

$$\underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, C_f^\bullet[-1])}_{=0} \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, C_f^\bullet)}_{=0}.$$

Die äußeren Terme sind 0, da $P^\bullet$ K-projektiv, also folgt der behauptete Isomorphismus.

(ii) $\implies$ (iii): Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $\text{id}^{-1}f = 0$. Nach ?? existiert ein $t: S^\bullet \rightarrow T^\bullet$ Quasiisomorphismus, s.d. $tf = 0$. Nach (ii) ist $t_*: \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, T^\bullet)$ injektiv, also folgt $f = 0$. Surjektivität: Sei $a \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$. Dann ist a ein Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & M^\bullet & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus. Nach (ii) ist $s_*: \text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, M^\bullet)$ surjektiv, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $sg = f$. Also kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & S^\bullet & & \\ & g \nearrow & \downarrow s & \nwarrow \text{id} & \\ P^\bullet & & M^\bullet & \xleftarrow{s} & S^\bullet \\ & f \searrow & \uparrow \text{id} & \swarrow s & \\ & & M^\bullet & & \end{array}.$$

Damit folgt $a = g\text{id}^{-1}$.

(iii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ exakt. Dann ist $S^\bullet \rightarrow 0$ ein Quasiisomorphismus, also $S^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{D}$, also

$$\text{Mor}_K(X^\bullet, S^\bullet) \stackrel{(ii)}{=} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X^\bullet, S^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X^\bullet, 0^\bullet) = 0.$$

□

Satz 4.7. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

- (i) $P^\bullet$ K -projektiv.
- (ii) Für alle Diagramme in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & M^\bullet & \\ & \downarrow s & \\ P^\bullet & \xrightarrow{f} & N^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: P^\bullet \rightarrow M^\bullet$, s.d. $sg = f$ in $\mathcal{K}$.

- (iii) Für alle Quasiisomorphismen $u: S^\bullet \rightarrow P^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $v: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $uv = \text{id}_{P^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Betrachte das gegebene Diagramm in $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} & X^\bullet & \\ g \nearrow & \downarrow \text{id}^{-1}s & \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}^{-1}f} & Y^\bullet \end{array}$$

Da s Quasiisomorphismus, ist s Isomorphismus in $\mathcal{D}$, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow X^\bullet$ in $\mathcal{D}$, sodass das Diagramm kommutiert. 4.6 (iii) liefert das gewünschte Diagramm in $\mathcal{K}$.

(ii) $\implies$ (iii): Betrachte

$$\begin{array}{ccc} & S^\bullet & \\ & \downarrow s & \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}} & P^\bullet \end{array}.$$

Da s Quasiisomorphismus existiert mit (ii) ein $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $sf = \text{id}_{P^\bullet}$.

(iii) $\implies$ (ii): Erneut mit ?? genügt es zu zeigen, dass für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ $\text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$ bijektiv ist. Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ mit $\text{id}^{-1}f = 0$ in $\mathcal{D}$. Dann existiert nach ?? ein $t: T^\bullet \rightarrow P^\bullet$ Quasiisomorphismus mit $ft = 0$. Also existiert mit (iii) ein $s: P^\bullet \rightarrow T^\bullet$, s.d. $ts = \text{id}_{P^\bullet}$, also

$$f = f\text{id}_{P^\bullet} = \underbrace{ft}_{=0} s = 0.$$

Surjektivität: Sei $a: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{D}$. Dann ist a gegeben durch ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q^\bullet & \\ & \swarrow s & \searrow f \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

in $\mathcal{K}$ mit s Quasiisomorphismus. Nach (iii) existiert ein $t: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ mit $st = \text{id}_{P^\bullet}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Q^\bullet & & \\
 & \swarrow s & \uparrow t & \searrow f & \\
 P^\bullet & \xleftarrow{\text{id}} & P^\bullet & & S^\bullet \\
 & \nwarrow \text{id} & \downarrow \text{id} & \nearrow ft & \\
 & & P^\bullet & &
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{K}$, also folgt $s^{-1}f = \text{id}^{-1}(ft)$ in $\mathcal{D}$. □

Durch Umdrehen aller Pfeile erhalten wir analog:

Satz 4.8. Für jeden Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ sind äquivalent:

- (i) $I^\bullet$ K-injektiv
- (ii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(S^\bullet, I^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

- (iii) Für jedes Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc}
 Y^\bullet & \xrightarrow{f} & I^\bullet \\
 \downarrow s & & \\
 X^\bullet & &
 \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: X^\bullet \rightarrow I^\bullet$, s.d. das Diagramm kommutiert.

- (iv) Für jeden Quasiisomorphismus $u: I^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $v: S^\bullet \rightarrow I^\bullet$, s.d. $vu = \text{id}_{I^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

4.2 Spezielle inverse und direkte Systeme

Um für einen Komplex $A^\bullet$ eine K-injektive bzw. K-projektive Auflösung zu erhalten, konstruieren wir bestimmte inverse bzw. direkte Systeme deren Limites die gewünschten Auflösungen liefern. Dazu benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 4.9 (Spezielles inverses System). Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

- (a) Ein inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Falls $n = 1$, dann ist $I_n^\bullet = 0$.
- (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kern der natürlichen Abbildung $I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

- (b) Die Klasse $\mathcal{J}$ heißt abgeschlossen unter speziellen inversen Limites, falls jedes $\mathcal{J}$ -spezielle inverse System in $\mathcal{K}$ einen Limes in $\mathcal{J}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{J}$, bereits in $\mathcal{J}$ ist.

Im Folgenden möchten wir zeigen, dass die Klasse der K-projektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites ist. Dazu benötigen wir die folgenden Lemmata:

Lemma 4.10. Sei $\mathcal{J}_0$ eine Klasse von Objekten von $\mathcal{A}$. Sei weiter $\mathcal{J}$ eine unter speziellen inversen Limites abgeschlossene Klasse von Objekten in $\mathcal{K}$, so dass jeder Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit nur einem nicht-null Term und mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{J}$ enthalten ist. Dann ist jeder nach unten beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{J}$ enthalten.

Beweis. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}^+$ mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung sei $A^i = 0$ für alle $i < 0$. Dann sind die Spalten des nachstehenden Diagramms ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System $(S_n^\bullet)_{n \geq 0}$ mit Übergangsabbildungen p_n ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A^2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

denn für $n > 0$ ist $\ker p_n^\bullet = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{A^{n-1}}_{\in \mathcal{J}_0} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$. Nach Voraussetzung ist also $\ker p_n$ in $\mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge $0 \rightarrow \ker p_n^\bullet \rightarrow S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$ zerfällt gradweise. Also folgt $A^\bullet = \varprojlim S_n^\bullet \in \mathcal{J}$. $\square$

Lemma 4.11. Die Klasse der exakten Komplexe in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$ ist abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein spezielles inverses System in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$. Für $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt $(S_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung P aus 3.1. Sei also $i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann erfüllt

$$(S_n^{i-1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+2})_{n \in \mathbb{N}}$$

die Bedingungen von 3.1, da nach Voraussetzung für alle $n > 1$ $\ker(S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet)$ exakt ist. Also ist

$$\begin{array}{ccccc}
 \varprojlim S_n^{i-1} & \longrightarrow & \varprojlim S_n^i & \longrightarrow & \varprojlim S_n^{i+1} \\
 \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\
 (\varprojlim S_n)^{i-1} & \longrightarrow & (\varprojlim S_n)^i & \longrightarrow & (\varprojlim S_n)^{i+1}
 \end{array}$$

exakt. Da $i \in \mathbb{Z}$ beliebig, folgt $\varprojlim S_n$ exakt. $\square$

Satz 4.12. Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(\mathcal{B})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein kovarianter Funktor, der mit inversen Limites vertauscht und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $F^{-1}(\mathcal{J})$ -spezielles inverses System. Dann ist $(F(S_n^\bullet))_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{J}$ -spezielles System, denn

- (i) $F(S_1) = F(1) = 0$, da F mit inversen Limites vertauscht und die Null der Limes des leeren Diagramms ist.
- (ii) Für $n > 1$ ist nach Voraussetzung

$$0 \longrightarrow \ker p_n \longrightarrow S_n^\bullet \xrightarrow{p_n} S_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt, zerfällt gradweise und $\ker p_n$ ist in $F^{-1}(\mathcal{J})$. Nach Voraussetzung ist damit

$$0 \longrightarrow F(\ker p_n) \longrightarrow F(S_n^\bullet) \xrightarrow{F(p_n)} F(S_{n-1}^\bullet) \longrightarrow 0$$

exakt und zerfällt gradweise. Aus der Exaktheit folgt damit auch $\ker F(p_n) = F(\ker p_n)$, also $\ker F(p_n) \in \mathcal{J}$.

Also $F(\varprojlim S_n^\bullet) = \varprojlim F(S_n^\bullet) \in \mathcal{J}$ und damit $\varprojlim S_n^\bullet \in F^{-1}(\mathcal{J})$. □

Korollar 4.13. Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren inverse Limites.

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Insbesondere ist die Klasse der K-injektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ die Klasse der exakten Komplexe und für $T^\bullet \in \mathcal{I}$ sei $\mathcal{E}_{T^\bullet}$ die Klasse der Komplexe $A^\bullet$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist. Dann ist $\mathcal{E}_{T^\bullet} = \text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)^{-1}(\mathcal{J})$. $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ erfüllt die Voraussetzungen von 4.15, denn:

- (i) Nach 4.11 ist $\mathcal{J}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.
- (ii) Wegen ?? ist $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ rechtsadjungiert und vertauscht daher mit Limites. Außerdem ist $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ gradweise additiv, erhält also gradweise zerfallende Folgen.

Also ist $\mathcal{E}_{T^\bullet}$ und damit $\bigcap_{T^\bullet \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_{T^\bullet}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Das Insbesondere folgt wenn $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ gesetzt wird. □

Wenn wir alle Pfeile umdrehen erhalten wir die folgende Definition und Ergebnisse:

Definition 4.14 (Spezielles direktes System). Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

- (a) Ein direktes System $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
- (i) Falls $n = 1$, dann ist $P_n^\bullet = 0$.
 - (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kokern der natürlichen Abbildung $P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{P}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

- (b) Die Klasse $\mathcal{P}$ heißt abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites, falls jedes $\mathcal{P}$ -spezielle direkte System in $\mathcal{K}$ einen Colimes in $\mathcal{P}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{P}$, bereits in $\mathcal{P}$ ist.

Durch Umdrehen aller Pfeile, erhalten wir auch eine duale Version von 4.10. Ebenfalls analog gilt:

Satz 4.15. Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(B)$ abgeschlossen unter speziellen inversen Colimites. Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(A) \rightarrow \mathcal{K}(B)$ ein kontravarianter Funktor, der direkte Colimites in inverse Limites überführt und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(A)$ abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Korollar 4.16. Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren direkte Colimites.

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, T^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites. Insbesondere ist die Klasse der K-projektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Definition 4.17. Angenommen inverse (bzw. direkte) Limites existieren in $\mathcal{K}$ und sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Dann nennen wir $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{G}$) die kleinste Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$, die abgeschlossen unter speziellen inversen (bzw. direkten) Limites ist und $\mathcal{G}$ enthält.

4.3 Existenz von K-projektiven und K-injektiven Auflösungen

4.3.1 Linksaufösungen

Sei $\mathcal{P}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Die folgenden Bedingungen an $\mathcal{P}$ sind äquivalent:

- (1) Jeder nach oben beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ hat eine Auflösung $P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ nach links mit $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und $P^\bullet$ nach oben beschränkt.
- (2) Für alle $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$, existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ mit $H^i(P^\bullet) = 0$ für $i > n$ und ein Komplexhomomorphismus $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$, der einen Isomorphismus $H^i(P^\bullet) \rightarrow H^i(A^\bullet)$ induziert für $i \leq n$.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\tau_{\leq n} A^\bullet$ nach oben beschränkt, also existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und ein Quasiisomorphismus $s: P^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$. Durch Komposition mit dem natürlichen Komplexhomomorphismus $\tau_{\leq n} A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ erhalten wir ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$. Für $i > n$ ist nun $H^i(P^\bullet) = H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = 0$. Für $i \leq n$ ist $H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = H^i(A^\bullet)$, also induziert f den gewünschten Isomorphismus.

(2) $\implies$ (1): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}^-$. Ohne Einschränkung ist $A^i = 0$ für alle $i > 0$. Dann existiert für $n = 0$ ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und f induziert $H^i(P^\bullet) \xrightarrow[0=H^i(f)]{\sim} 0 = H^i(A^\bullet)$ für $i > 0$ und $H^i(P^\bullet) \xrightarrow[\sim]{H^i(f)} H^i(A^\bullet)$ für $i \leq 0$. Also ist f ein Quasiisomorphismus. $\square$

Im Folgenden nehmen wir an, dass $\mathcal{P}$ die Eigenschaft (1) erfüllt.

Beispiel 4.18. Falls $\mathcal{A}$ genügend Projektive hat, können wir $\mathcal{P}$ als die Klasse der nach oben beschränkten Komplexe $P^\bullet \in \mathcal{K}$ mit P^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$ wählen.

Ein solches $P^\bullet$ ist K-projektiv, denn: Für alle eingradigen Komplexe $Q^\bullet$ mit Q^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $Q^\bullet$ nach 4.4 K-projektiv. Da nach 4.16 die Klasse der K-projektiven abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites ist, folgt mit dem Dual von 4.10, dass $P^\bullet$ K-projektiv ist.

Erneut nach 4.16 sind die Komplexe in $\mathcal{P}$ damit ebenfalls K-projektiv.

Unser Ziel ist nun für einen gegebenen Komplex $A^\bullet$ eine Auflösung nach Links durch einen Komplex aus $\mathcal{P}$ zu konstruieren. Dazu schneiden wir den Komplex nach oben ab und lösen schrittweise auf. Das folgende Lemma führt diese Konstruktion aus.

Lemma 4.19. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System $(P_n^\bullet)_{n \geq -1}$ und ein direktes System von Kettenhomomorphismen $f_n: P_n^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$, sodass f_n ein Quasiisomorphismus ist für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Setze $P_{-1}^\bullet = 0$ und $f_{-1} = 0$. Nach (1) existiert ein Quasiisomorphismus $f_0: P_0^\bullet \rightarrow \tau_{\leq 0} A^\bullet$ mit $P_0^\bullet \in \mathcal{P}$.

Sei nun $n \geq 1$ und seien $P_{-1}^\bullet, \dots, P_{n-1}^\bullet$ und $f_{-1}, \dots, f_{n-1}$ konstruiert mit $P_i^\bullet \in \mathcal{K}^-$. Dann setze $P^\bullet = P_{n-1}^\bullet$, $B^\bullet = \tau_{\leq n} A^\bullet$. Es sei $a_{n-1}: \tau_{\leq n-1} A^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$ der natürliche Komplexhomomorphismus und $f = a_{n-1} f_{n-1}$.

Da $B^\bullet = \tau_{\leq n} A^\bullet$ und $P^\bullet$ nach oben beschränkt sind und $C_f^i = P^{i+1} \oplus B^i$, existiert mit (1) ein Quasiisomorphismus $g: Q^\bullet \rightarrow C_f^\bullet[-1]$ mit $Q^\bullet[1] \in \mathcal{P}$ und $Q^\bullet$ nach oben beschränkt. Da gradweise $C_f^i[-1] = P^i \oplus B^{i-1}$ ist $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist g gradweise gegeben durch $g'_i: Q^i \rightarrow P^i$ und $g''_i: Q^i \rightarrow B^{i-1}$.

Betrachte für $i \in \mathbb{Z}$ das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Q^i & \xrightarrow{d_Q} & Q^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow (g', g'') & & \downarrow (g', g'') & & \\ \dots & \longrightarrow & P^i \oplus B^{i-1} & \xrightarrow{d_{C_f[-1]}} & P^{i+1} \oplus B^i & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (*)$$

In Matrixnotation ist

$$d_{C_f} = \begin{pmatrix} d_P[1] & 0 \\ f[1] & d_B \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$d_{C_f}[-1] = -d_{C_f} = \begin{pmatrix} -d_P[1] & 0 \\ -f[1] & -d_B \end{pmatrix}.$$

Auswerten von (*) in beiden Summanden liefert nun

$$d_P g' = g' d_Q \quad (3)$$

$$g'' d_Q = -f g' - d_B g''. \quad (4)$$

Aus (3) folgt, dass $g': Q^\bullet \rightarrow P^\bullet$ ein Komplexhomomorphismus ist. Setze nun $h: C_{-g'}^\bullet \rightarrow B^\bullet$ durch

$$h(x, y) = g''[1](x) + f(y).$$

Betrachte nun für $i \in \mathbb{Z}$ das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Q^{i+1} \oplus P^i & \xrightarrow{d_{C_{-g'}}} & Q^{i+2} \oplus P^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ \dots & \longrightarrow & B^i & \xrightarrow{d_B} & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}.$$

In Matrixnotation ist

$$\begin{aligned} h d_{C_{-g'}} &= (g''[1] \quad f) \begin{pmatrix} d_Q[1] & 0 \\ -g'[1] & d_P \end{pmatrix} \\ &= (g''[1] d_Q[1] - f g'[1] \quad f d_P) \\ &\stackrel{(4)}{=} (d_B g'' \quad f d_P) \\ &\stackrel{(?)}{=} (d_B g'' \quad d_B f) \\ &= d_B h. \end{aligned}$$

Also ist h Komplexhomomorphismus. Bleibt zu zeigen, dass h ein Quasiisomorphismus ist. Dafür genügt es nach ?? zu zeigen, dass $C_h^\bullet$ exakt ist. Behauptung: $C_h^\bullet = C_{-g}^\bullet[1]$.

Es ist gradweise für $i \in \mathbb{Z}$

$$C_h^i = C_{-g}^{i+1} \oplus B^i = (Q^{i+2} \oplus P^{i+1}) \oplus B^i = Q^{i+2} \oplus (P^{i+1} \oplus B^i) = Q^{i+2} \oplus C_f^i = C_{-g}^i[1].$$

Für die Differentiale gilt, wieder in Matrixnotation:

$$d_{C_h} = \begin{pmatrix} d_{C_{-g'}}[1] & 0 \\ h[1] & d_B \end{pmatrix} [1] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_Q[1] & 0 \\ -g'[1] & d_P \end{pmatrix} [1] & 0 \\ \begin{pmatrix} g''[1] & f \end{pmatrix} [1] & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Q & 0 & 0 \\ g' & -d_P & 0 \\ g'' & f & d_B \end{pmatrix}.$$

Analog folgt

$$d_{C_{-g}[1]} = \begin{pmatrix} d_Q[1] & 0 \\ -g & d_{C_f[-1]} \end{pmatrix} [1] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_Q[1] & 0 \\ -g' & -g'' \end{pmatrix} [1] & \begin{pmatrix} d_P[1] & 0 \\ f[1] & d_B \end{pmatrix} [-1] \end{pmatrix} [1] = \begin{pmatrix} -d_Q & 0 & 0 \\ g' & -d_P & 0 \\ g'' & f & d_B \end{pmatrix}.$$

Also folgt die Behauptung. Da g und demnach $-g$ ein Quasiisomorphismus ist und Verschieben Exaktheit erhält, folgt damit mit ?? die Exaktheit von $C_{-g}^\bullet[1]$.

Setze nun $P_n^\bullet := C_{-g'}^\bullet$ und $f_n := h$. Da nach Voraussetzung $P^\bullet$ und $Q^\bullet$ nach oben beschränkt sind, ist auch $C_{-g'}^\bullet$ nach oben beschränkt.

Sei $p_{n-1}: P_{n-1}^\bullet = P^\bullet \rightarrow P_n^\bullet$ die natürliche Abbildung. Dann ist p_{n-1} gradweise gegeben durch die natürliche Inklusion $P^i \rightarrow Q^{i+1} \oplus P^i$. Also folgt $\text{coker } p_{n-1} = Q^\bullet[1] \in \mathcal{P}$ und wir haben gradweise zerfallende exakte Folgen:

$$0 \longrightarrow P^i \xrightarrow{p_{n-1}} Q^{i+1} \oplus P^i \longrightarrow Q^{i+1} \longrightarrow 0.$$

Also ist $(P_n^\bullet)_{n \geq -1}$ ein $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System. Außerdem ist nach Definition von h : $f_n p_{n-1} = h p_{n-1} = f = a_{n-1} f_{n-1}$, also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} P_{n-1}^\bullet & \xrightarrow{p_{n-1}} & P_n^\bullet \\ \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n = h \\ \tau_{\leq n-1} A^\bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \tau_{\leq n} A^\bullet \end{array}$$

und $(f_n)_{n \geq -1}$ ist ein direktes System. □

Dieses Lemma können wir nun anwenden, um das zentrale Ergebnis zu zeigen:

Satz 4.20. Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und $\text{colim}_{\rightarrow}$ ist exakt.

Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine $\mathcal{P}$ -Linksauflösung.

Beweis. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $(P_n^\bullet)_{n \geq -1}$, $(f_n)_{n \geq -1}$ wie in 4.19. Da direkte Colimites in $\mathcal{A}$ existieren und sich diese in $\mathcal{K}$ gradweise bilden, existieren direkte Colimites in $\mathcal{K}$. Nach der Definition von $\mathcal{P}$ ist dann $P^\bullet := \text{colim}_{\rightarrow} P_n^\bullet$ in $\mathcal{P}$.

Wir erhalten ebenfalls

$$f := \text{colim}_{\rightarrow} f_n: P^\bullet \longrightarrow \text{colim}_{\rightarrow} \tau_{\leq n} A^\bullet = A^\bullet.$$

Da $\text{colim}_{\rightarrow}$ exakt, folgt für $i \in \mathbb{Z}$:

$$H^i(f) = H^i(\text{colim}_{\rightarrow} f_n) = \text{colim}_{\rightarrow} \underbrace{H^i(f_n)}_{\text{Isomorphismus}}.$$

Also ist f ein Quasiisomorphismus. □

Korollar 4.21. Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und $\text{colim}_{\rightarrow}$ ist exakt.

Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine K -projektive Linksauflösung.

Beweis. Wähle $\mathcal{P}$ wie in Beispiel 4.18 und wende 4.20 an. □

4.3.2 Rechtsauflösungen

Sei $\mathcal{J}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Im Folgenden nehmen wir an, dass $\mathcal{J}$ die folgende Eigenschaft erfüllt:

- (1) Jeder nach unten beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ hat eine Auflösung $A^\bullet \rightarrow I^\bullet$ nach rechts mit $I^\bullet \in \mathcal{J}$ und $I^\bullet$ nach unten beschränkt.

Beispiel 4.22. Falls $\mathcal{A}$ genügend Injektive hat, können wir dual zu Beispiel 4.18 $\mathcal{J}$ als die Klasse der nach unten beschränkten Komplexe mit in $\mathcal{A}$ injektiven Objekten wählen.

Durch Umdrehen der Pfeile erhalten wir die duale Aussagen von 4.19 und 4.20:

Lemma 4.23. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System $(I_n^\bullet)_{n \geq -1}$ und ein inverses System von Kettenhomomorphismen $f_n: \tau^{\geq -n} A^\bullet \rightarrow I_n^\bullet$, sodass f_n ein Quasiisomorphismus ist.

Satz 4.24. Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und $\varprojlim$ ist exakt.

Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine $\mathcal{P}$ -Rechtsauflösung.

Bemerkung 4.25. Leider findet 4.24 in $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ für R ein Ring keine Anwendung, da hier $\varprojlim$ nicht exakt ist.

Diese Voraussetzung wird jedoch nur verwendet, um zu zeigen, dass $f = \varprojlim f_n: A^\bullet \rightarrow \varprojlim I_n^\bullet$ ein Quasiisomorphismus ist. Wir können uns der speziellen Struktur des inversen Systems $(I_n^\bullet)_{n \geq -1}$ bedienen, um für $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ zu zeigen, dass f dennoch ein Quasiisomorphismus ist.

Satz 4.26. Sei R ein Ring und $\mathcal{A}$ die Kategorie der R -links-Moduln. Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine K -injektive Rechtsauflösung.

Beweis. Seien $(I_n^\bullet)_{n \geq -1}$ und $(f_n)_{n \geq -1}$ wie in 4.23. Seien $I^\bullet = \varprojlim I_n^\bullet$ und $f = \varprojlim f_n$. Es genügt zu zeigen, dass f ein Quasiisomorphismus ist.

Sei $i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Für $n > 1$ haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} I^\bullet & \longrightarrow & I_n^\bullet & \xrightarrow{p_n} & I_{n-1}^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ A^\bullet & \longrightarrow & \tau^{\geq -n} A^\bullet & \longrightarrow & \tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet \end{array}$$

Wende nun $H^i(-)$ auf dieses Diagramm an:

$$\begin{array}{ccccc} H^i(I^\bullet) & \longrightarrow & H^i(I_n^\bullet) & \xrightarrow{H^i(p_n)} & H^i(I_{n-1}^\bullet) \\ \downarrow H^i(f) & & \sim \downarrow H^i(f_n) & & \sim \downarrow H^i(f_{n-1}) \\ H^i(A^\bullet) & \longrightarrow & H^i(\tau^{\geq -n} A^\bullet) & \longrightarrow & H^i(\tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet) \end{array} \quad (5)$$

Die rechten beiden vertikalen Pfeile sind Isomorphismen, da f_k ein Quasiisomorphismus ist für alle $k \geq -1$.

Sei nun $n \geq -i + 1$. Dann ist $i \geq -n + 1 \geq -n$, also ist $H^i(A^\bullet) = H^i(\tau^{\geq -n} A^\bullet) = H^i(\tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet)$. Also sind die Abbildungen in der unteren Zeile in (5) Isomorphismen und damit ist $H^i(p_n): H^i(I_n^\bullet) \rightarrow H^i(I_{n-1}^\bullet)$ ein Isomorphismus.

Betrachte nun die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \ker p_n \longrightarrow I_n^\bullet \xrightarrow{p_n} I_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0.$$

Das liefert eine lange exakte Kohomologiefolge:

$$H^{i-1}(I_n^\bullet) \xrightarrow{H^{i-1}(p_n)} H^{i-1}(I_{n-1}^\bullet) \longrightarrow H^i(\ker p_n) \longrightarrow H^i(I_n^\bullet) \xrightarrow{H^i(p_n)} H^i(I_{n-1}^\bullet) \quad (6)$$

Anwenden des obigen Arguments auf $i-1$ liefert für $n \geq -(i-1)+1 = -i+2 \geq -i+1$ Isomorphismen $H^i(p_n)$ und $H^{i-1}(p_n)$. Aufgrund der Exaktheit von (6) folgt, dass $H^i(\ker p_n) = 0$ für alle $n \geq -i+2$.

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann setze $N := -m+1$. Dann ist für alle $n > N$:

$$H^m(\ker p_n) = 0 = H^{m+1}(\ker p_n).$$

Also ist die Folge

$$\ker p_n^{m-1} \longrightarrow \ker p_n^m \longrightarrow \ker p_n^{m+1} \longrightarrow \ker p_n^{m+2} \quad (7)$$

für $n > N$ exakt. Das System

$$(I_n^{m-1})_{n \geq -1} \longrightarrow (I_n^m)_{n \geq -1} \longrightarrow (I_n^{m+1})_{n \geq -1} \longrightarrow (I_n^{m+2})_{n \geq -1}$$

erfüllt damit die Bedingungen von 3.1. Also ist die natürliche Abbildung

$$H^m(I^\bullet) \longrightarrow H^m(I_N^\bullet)$$

ein Isomorphismus. Erneute Betrachtung von (5) für $i = m$ und $n = N$ liefert nun, dass $H^i(f)$ ein Isomorphismus ist. $\square$

5 Adjunktion von abgeleitetem Hom und Tensorprodukt

Sei A ein kommutativer Ring und im Folgenden $\mathcal{A}$ die Kategorie der A -Moduln.

5.1 K-flache Komplexe

Um das Tensorprodukt abzuleiten, benötigen wir noch eine weitere Klasse von Komplexen.

Definition 5.1 (K-flacher Komplex). Ein Komplex $M^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-flach, wenn für jeden exakten Komplex $S^\bullet \in \mathcal{K}$ auch $M^\bullet \otimes_A S^\bullet$ exakt ist.

Satz 5.2. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $M^i = 0$ für $i \neq 0$. Dann ist $M^\bullet$ genau dann K-flach, wenn M^0 flacher A -Modul ist.

Beweis. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ wie im Satz. Dann ist für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$(M^\bullet \otimes_A S^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes_A S^j = M^0 \otimes S^n = (M^0 \otimes S^\bullet)^n$$

und für $m \in M^0, s \in S^n$:

$$d_{M^\bullet \otimes_A S^\bullet}^n(m \otimes s) = \underbrace{d_M^0(m)}_{=0} \otimes_A s + (-1)^0 m \otimes_A d_S(s) = m \otimes_A d_S(s) = d_{M^0 \otimes_A S^\bullet}.$$

Also ist $M^\bullet \otimes_A S^\bullet = M^0 \otimes_A S^\bullet$. Damit folgt die Behauptung aus den Definitionen. $\square$

Satz 5.3. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $M^\bullet$ ist K-flach.
- (ii) $\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)$ ist K-injektiv für jeden K-injektiven Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $I^\bullet$ K-injektiv und $S^\bullet$ exakt. Dann ist

$$\text{Hom}^\bullet(S^\bullet, \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)) \stackrel{??}{\cong} \text{Hom}^\bullet(\underbrace{S^\bullet \otimes_A M^\bullet}_{\text{exakt}}, \underbrace{I^\bullet}_{\text{K-injektiv}}).$$

Weil $M^\bullet$ K-flach ist, folgt $S^\bullet \otimes_A M^\bullet$ exakt, also wegen $I^\bullet$ K-injektiv, die Behauptung.

(ii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ azyklisch. A -Mod hat genügend Injektive, also genügt es wegen ?? zu zeigen, dass für jeden injektiven A -Modul I , $\text{Hom}^\bullet(S^\bullet \otimes_A M^\bullet, I)$ exakt ist. Dazu sei I injektiver A -Modul und $I^\bullet = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow I \rightarrow 0 \cdots]$. Dann ist nach 4.4 $I^\bullet$ K-injektiv und damit

$$\text{Hom}^\bullet(S^\bullet \otimes_A M^\bullet, I) = \text{Hom}^\bullet(S^\bullet \otimes_A M^\bullet, I^\bullet) \stackrel{??}{\cong} \text{Hom}^\bullet(\underbrace{S^\bullet}_{\text{exakt}}, \underbrace{\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)}_{\text{K-injektiv}})$$

exakt. $\square$

Satz 5.4. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K-projektiv. Dann ist $M^\bullet$ K-flach.

Beweis. Sei $M^\bullet$ K-projektiv und $S^\bullet$ exakt. Sei weiter $I^\bullet$ K-injektiv. Dann folgt

$$\text{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A S^\bullet, I^\bullet) \stackrel{??}{\cong} \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, \text{Hom}^\bullet(S^\bullet, I^\bullet)).$$

Es ist $\text{Hom}^\bullet(S^\bullet, I^\bullet)$ exakt, da $I^\bullet$ K-injektiv und damit die rechte Seite, da $M^\bullet$ K-projektiv ist. Also folgt die Behauptung mit ?? $\square$

Satz 5.5. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K-flach und exakt. Dann ist $M^\bullet \otimes_A N^\bullet$ exakt für alle $N^\bullet \in \mathcal{K}$.

Beweis. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K-flach und exakt und sei $N^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann existiert nach 4.21 ein $P^\bullet \in \mathcal{K}$ K-projektiv und ein Quasiisomorphismus $P^\bullet \rightarrow N^\bullet$. Da $M^\bullet$ K-flach, ist $M^\bullet \otimes_A -$ ein exakter Funktor also folgt

$$H^i(M^\bullet \otimes_A N^\bullet) = M^\bullet \otimes_A H^i(N^\bullet) = M^\bullet \otimes_A H^i(P^\bullet) = H^i(M^\bullet \otimes_A P^\bullet). \quad (8)$$

Wegen 5.1 ist $P^\bullet$ K-flach, also folgt mit der Exaktheit von $M^\bullet$, dass $M^\bullet \otimes_A P^\bullet$ exakt ist. Damit folgt die Behauptung aus (9). $\square$

Satz 5.6. Sei $I^\bullet \in \mathcal{K}$ K-injektiv und exakt. Dann ist $\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)$ exakt für alle $M^\bullet \in \mathcal{K}$.

Beweis. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann existiert nach 4.21 ein $P^\bullet \in \mathcal{K}$ K-projektiv und ein Quasiisomorphismus $P^\bullet \rightarrow M^\bullet$. Da $I^\bullet$ K-injektiv, ist $\text{Hom}^\bullet(-, I^\bullet)$ ein exakter Funktor, also folgt

$$H^i(\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)) = \text{Hom}^\bullet(H^i(M^\bullet), I^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(H^i(P^\bullet), I^\bullet) = H^i(\text{Hom}^\bullet(P^\bullet, I^\bullet)). \quad (9)$$

Da $P^\bullet$ K-projektiv und $I^\bullet$ exakt, folgt die Exaktheit der rechten Seite und damit die Behauptung. $\square$

Umdrehen der Pfeile liefert

Satz 5.7. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$ K-projektiv und exakt. Dann ist $\text{Hom}^\bullet(P^\bullet, M^\bullet)$ exakt für alle $M^\bullet \in \mathcal{K}$.

5.2 Abgeleitete Hom[•] Funktoren

Satz 5.8. Seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann ist $\text{RHom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet)$ wohldefiniert und kann mithilfe einer K-projektiven Auflösung von $M^\bullet$ oder einer K-injektiven Auflösung von $N^\bullet$ berechnet werden.

Beweis. In der Notation von ?? wähle $\mathcal{L}$ als die volle Unterkategorie der K-injektiven Komplexe von $\mathcal{K}$. Dann ist für $M^\bullet$ beliebig:

- (i) $\mathcal{L}$ ist trianguliert nach 4.5.
- (ii) Für alle $N^\bullet \in \mathcal{K}$ existiert ein Quasiisomorphismus $N^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit $I^\bullet \in \mathcal{L}$.
- (iii) Nach 5.6 ist $\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, -)|_{\mathcal{L}}$ exakt.

Also existiert $\text{RHom}^\bullet(M^\bullet, -)$. Analog berechnet sich $\text{RHom}^\bullet(-, N^\bullet)$ für $N^\bullet \in \mathcal{K}$ unter Wahl von $\mathcal{L}$ als die volle Unterkategorie der K-projektiven Komplexe von $\mathcal{K}$. Beide Ableitungen stimmen überein, denn für $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig und $P^\bullet \rightarrow M^\bullet$ und $N^\bullet \rightarrow I^\bullet$ K-projektive bzw. K-injektive Auflösungen gilt mit wiederholter Anwendung von ?? und wegen $P^\bullet \cong M^\bullet$ und $N^\bullet \cong I^\bullet$ in $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \text{RHom}^\bullet(M^\bullet, -)(N^\bullet) &= \text{RHom}^\bullet(P^\bullet, -)(I^\bullet) \\ &= \text{Hom}^\bullet(P^\bullet, I^\bullet) \\ &= \text{RHom}^\bullet(-, I^\bullet)(P^\bullet) \\ &= \text{RHom}^\bullet(-, N^\bullet)(M^\bullet). \end{aligned}$$

$\square$

5.3 Abgeleitetes Tensorprodukt

Satz 5.9. Seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann ist $M^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} N^\bullet$ wohldefiniert und kann mithilfe einer K- $\mathcal{A}$ -Auflösung einer der Faktoren berechnet werden.