Aufgabe	A1	A2	A3	$\sum$
Punkte				

Aufgabe 1. a) Beh.: Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^2 = P$ und $P \neq 0$. Dann gilt für $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}$ mit $P^2 = P$ und $\|\cdot\|$ natürlich. Dann ist $\|\cdot\|$ insbesondere submultiplikativ, also folgt $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\| \cdot \|P\| \implies 1 \leq \|P\|$. □

b) Beh.: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt

$$A = \bar{A}^T \iff (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es ist

$$\begin{aligned} & (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \\ \iff & x^T A^T \bar{y} = x^T \bar{A}\bar{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \\ \overset{(*)}{\iff} & A^T = \bar{A} \\ \iff & A = \bar{A}^T. \end{aligned}$$

$(*)$ folgt durch Einsetzen von allen Koordinateneinheitsvektoren für x und y. □

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Beh.: Es existiert ein $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = B \cdot B$.

Beweis. Da A symmetrisch und positiv definit, existiert eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix D mit $A = QDQ^T$. Da A symmetrisch und positiv definit, sind alle Eigenwerte λ_i positiv. Definiere

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \\ 0 & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt also $D = \widetilde{D}^2$. Dann wähle $B := Q\widetilde{D}Q^T$. Dann folgt

$$B \cdot B = Q\widetilde{D}\underbrace{Q^T \cdot Q}_{=E_n}\widetilde{D}Q^T = Q\widetilde{D}^2Q^T = QDQ^T = A.$$

□

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ positiv definit und für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A symmetrisch. Es sei außerdem für $x \in \mathbb{K}^n$:

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2}.$$

a) Beh.:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) &= \lambda_{\max}(A) \\ \inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) &= \lambda_{\min}(A). \end{aligned}$$

Beweis. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist A bereits symmetrisch. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ist A nach VL hermitesch, da A positiv definit, d.h. $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{C}^n$.

λ_i seien die Eigenwerte von A. Da A positiv definit, gilt $\lambda_i > 0$. Da A symmetrisch bzw. hermitesch, gilt dann:

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = \lambda_{\max}(A).$$

Weiter gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n$:

$$\frac{(Ax,x)_2}{(x,x)_2} \overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \frac{\|Ax\|_2\|x\|_2}{\|x\|_2^2} = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Damit folgt

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \lambda_{\max}(A).$$

Also ist $\lambda_{\max}(A)$ eine obere Schranke von $R_A(x)$.

Weiter existiert ein Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ zum Eigenwert $\lambda_{\max}(A)$ mit $Av = \lambda_{\max}(A)v$. Damit folgt

$$R_A(v) = \frac{(Av,v)_2}{(v,v)_2} = \frac{\lambda_{\max}(A)(v,v)_2}{(v,v)_2} = \lambda_{\max}(A).$$

Also folgt die Behauptung für das Supremum.

Für das Infimum gilt

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) &= -\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} -R_A(x) \\
&\geq -\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} -\frac{\|Ax\|}{\|x\|_2} \\
&= -\max_{1\leq i\leq n} -|\lambda_i| \\
&= \min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \\
&= \lambda_{\min}(A).
\end{aligned}$$

Also ist $\lambda_{\min}(A)$ eine untere Schranke von $R_A(x)$. Analog zu $\lambda_{\max}(A)$ existiert wieder ein Eigenvektor, sodass die Infimumseigenschaft folgt. □

b) Beh.:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

Beweis. A ist wie in (a) immer noch symmetrisch bzw. hermitesch. Dann gilt nach VL

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A).$$

Außerdem existiert A^{-1}, da A positiv definit und symmetrisch bzw. hermitesch und damit alle Eigenwerte positiv. Weiter ist A^{-1} ebenfalls symmetrisch bzw. hermitesch, denn A ist symmetrisch bzw. hermitesch und damit $\overline{A^{-1}}^T = \left(\bar{A}^T\right)^{-1} = A^{-1}$.

Weiter gilt $\lambda \neq 0$ Eigenwert von A, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} zu den selben Eigenvektoren, denn

$$Av = \lambda v \implies A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \implies v = \lambda A^{-1}v \implies \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v.$$

Da A positiv definit und symmetrisch bzw. hermitesch, sind alle Eigenwerte positiv und damit $\lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(A)}$. Damit folgt

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

□

Aufgabe 3. Ansatz 1. Bezeichne

$$G := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A \text{ untere Dreicksmatrix mit 1-en auf Hauptdiagonale }\}.$$

a) Beh.: G ist Gruppe.

Beweis. (G1) Seien $A, B \in G$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Dann ist $C = AB$ mit $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$. Wegen A, $B \in G$, gilt $a_{ij} = b_{ij} = 0$ für $i < j$ und $a_{ij} = b_{ij} = 1$ für $i = j$. Damit folgt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \\ \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also ist $C \in G$.

(G2) Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Diese ist untere Dreiecksmatrix mit 1-en auf Hauptdiagonale also $E_n \in G$.

(G3) Sei $A \in G$. Dann ist $\det(A) = 1$, wegen der Dreiecksgestalt und allen Hauptdiagonalelementen gleich 1. Also ex. $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
Zz.: $A^{-1} \in G$. Betrachte die Adjunkte $\tilde{A}$ zu A mit Einträgen $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$, wobei A_{ji} die Matrix bezeichnet, die durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte in A entsteht.
Seien $1 \leq i, j \leq n$. Falls $i = j$. Dann ist $\tilde{a}_{ii} = (-1)^{2i} |A_{ii}| = |\underbrace{A_{ii}}_{\in G}| = 1$. Falls $i < j$. Dann ist A_{ij} obere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Hauptdiagonale, oder eine 4×4 Blockmatrix, mit zwei Nullblöcken nebeneinander. Also $|A_{ij}| = 0$ und damit $\tilde{A} \in G$.
Damit folgt mit der 2. Cramerschen Regel:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \in G.$$

$\square$

b) Beh.: G ist nicht abelsch.

Beweis.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

c) Beh.: LU Zerlegung eindeutig.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $A = LU = \tilde{L}\tilde{U}$ mit $L, \tilde{L} \in G$ und $U, \tilde{U}$ obere Dreicksmatrizen.
Dann ist zunächst $U, \tilde{U}$ regulär, denn: $L, \tilde{L} \in G$, also regulär und die Menge der regulären Matrizen in $\mathbb{K}^{n \times n}$ Gruppe. Somit

$$A = LU = \tilde{L}\tilde{U} \implies L^{-1}A = U \wedge \tilde{L}^{-1}A = \tilde{U}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & A = LU \\ \implies & A = \tilde{L}\tilde{U}(\tilde{L}\tilde{U})^{-1}LU \\ \implies & A = A(\tilde{L}\tilde{U})^{-1}LU \\ \implies & E_n = (\tilde{L}\tilde{U})^{-1}LU \\ \implies & E_n = \tilde{U}^{-1}\tilde{L}^{-1}LU \\ \implies & \tilde{U}U^{-1} = \tilde{L}^{-1}L \in G. \end{aligned}$$

Da $\tilde{U}$ und U^{-1} obere Dreiecksmatrizen, ist auch das Produkt, analog zu (a) eine obere Dreicksmatrix, d.h. $\tilde{U}U^{-1} \in G$ ist obere Dreicksmatrix, damit folgt $\tilde{U}U^{-1} = E_n$, also $\tilde{L}^{-1}L = E_n \implies L = \tilde{L}$. Also $LU = A = L\tilde{U}$. Da L regulär, folgt $U = \tilde{U}$. $\square$