Blatt 4 Julia Fila, Christian Merten

A1	A2	A3	Σ

A1 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(a) $f = u + iv \in \mathcal{O}(U) \cap C^2(U, \mathbb{C})$.

Zz: u, v harmonisch.

Bew. Es ist f holomorph, d.h. Cauchy-Riemann ist erfüllt, dann rechne:

$$\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) \overset{C-R}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) \underset{v \in C^2}{\overset{\text{Schwarz}}{=}} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) \overset{C-R}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0$$

$$\Delta v(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z) \overset{C-R}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}(z) \underset{u \in C^2}{\overset{\text{Schwarz}}{=}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(z) \overset{C-R}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) = 0$$

□

(b) $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ harmonisch.

Beh. Sind $v, \tilde{v}$ harmon. Konjugierte von u, dann ist $v - \tilde{v}$ lokal konstant.

Bew. Es ist $u + iv \in \mathcal{O}(U)$ und $u + i\tilde{v} \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist aber auch $\mathcal{O}(U) \ni u + iv - (u + i\tilde{v}) = i(v - \tilde{v})$. Also gilt C-R und es folgt

$$\frac{\partial(v-\tilde{v})}{y} = \frac{\partial 0}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial 0}{\partial y} = \frac{\partial(v-\tilde{v})}{\partial x}.$$ Also ist $v - \tilde{v}$ lokal konstant. □

Damit $v - \tilde{v}$ konstant, muss U zshgd. also Gebiet sein.

(c) $U := \mathbb{C}_-$, $u(z) := \log|z|$

Beh. u harmonisch mit harmon. Konjugierter $v: \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$, $z \longmapsto \operatorname{Arg}(z)$

Bew. Es ist für $z \in \mathbb{C}^-$: $u(z) = \log|z| = \log\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Da offensichtlicherweise $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ folgt u harmonisch. #

Nun ist $\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z = u(z) + iv(z)$ auf $\mathbb{C}_-$ holomorph.

□

(d) Beh: $u(z) = \log|z|$ besitzt keine harmon. Konj. auf $\mathbb{C}^\times$.

Bew: Ang: $\exists v \in C^2(\mathbb{C}^\times, \mathbb{R})$ mit $u+iv$ holomorph auf $\mathbb{C}^\times$. Dann ist $v|_{\mathbb{C}_-}$ harmon. konjugierte von $u|_{\mathbb{C}_-}$. Da $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ harmon. konj. zu $u|_{\mathbb{C}_-}$, folgt nach (b), dass $\mathrm{Arg} - v|_{\mathbb{C}_-}$ konstant, da $\mathbb{C}^-$ zshgd.. Also ex. ein $S \in \mathbb{R}$, sd für $z \in \mathbb{C}_-$ gilt: $v(z) = \mathrm{Arg}(z) + S$. Dann ist für $z \in \mathbb{C}^\times$

$$\lim_{t \searrow 0} v(z+ti) = S + \lim_{t \searrow 0} \mathrm{Arg}(z+ti) = S + \pi \neq S - \pi = S + \lim_{t \nearrow 0} \mathrm{Arg}(z+ti)$$
$$= \lim_{t \nearrow 0} v(z)$$

↯ zur Stetigkeit von v. □

A2/ (a) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig diff'bar, $f_n: \gamma([0,1]) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ stetig mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $f \in C^0(\gamma([0,1]), \mathbb{C})$.

Beh:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

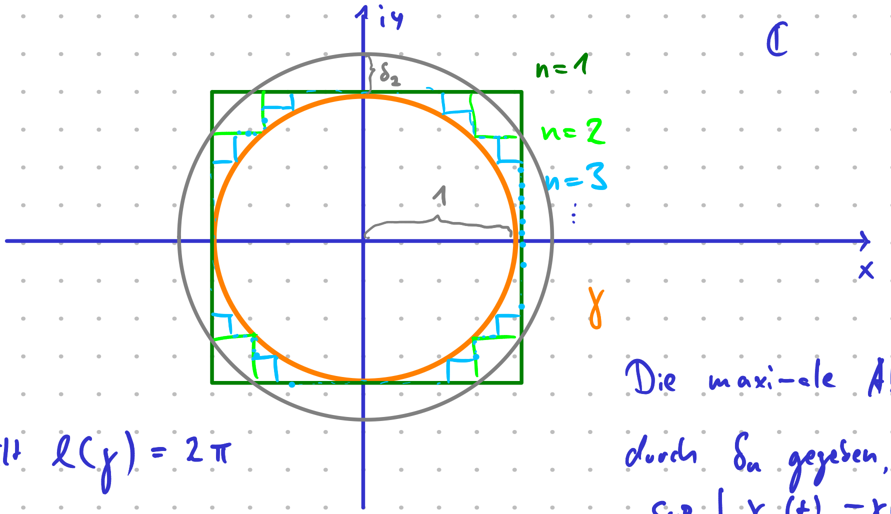
Bew: Zunächst beachte, dass γ' stetig, d.h. auf Kompaktum $[0,1]$ beschränkt. Also folgt $\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt < \infty$. Falls $\gamma'(t) = 0$ $\forall t \in [0,1]$, dann sind beide Seiten gleich null. Sei also $\gamma' \not\equiv 0$. Dann ist $\ell(\gamma) > 0$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sd. $\sup_{z \in \gamma([0,1])} |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}$ $\forall n \geq n_0$.

Dann folgt mit Standardabschätzung $\forall n \geq n_0$:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)|\,dz$$
$$\leq \sup_{z \in \gamma([0,1])} |f(z) - f_n(z)| \cdot \ell(\gamma)$$
$$< \varepsilon$$

□

(b)



Dann gilt $\ell(\gamma) = 2\pi$

$\ell(\gamma_1) = 8$

Durch das "Invertieren" der Ecken bleibt der Umfang gleich. Induktiv folgt also $\ell(\gamma_n) = 8$.

Die maximale Abweichung von γ_n zu γ ist durch δ_n gegeben, also folgt $\sup_t |\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq \delta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

<u>A3</u> (i) Es ist $\partial U_1(2)$ geschlossen. Es ist $\partial U_1(2) \subseteq \mathbb{C}_-$, d.h. $F: \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit $F(z) := \log(z-i)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z-i} = F'(z)$ auf $\partial U_1(2)$.

Also folgt $\int_{\partial U_1(2)} \frac{1}{z-i}\, dz = 0$.

(ii) Setze $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_{-k} z^{-k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert s_n glm gegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ und es ist

$$\int_{\partial U_1(0)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k} \right) dz = \int_{\partial U_1(0)} \lim_{n\to\infty} s_n(z)\, dz \overset{2(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial U_1(0)} s_n(z)\, dz$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial U_1(0)} \sum_{k=1}^{n} a_{-k} z^{-k}\, dz$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \left(\int_{\partial U_1(0)} z^{-k}\, dz \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\int_{\partial U_1(0)} z^{-k}\, dz \right)$$

$$\overset{VL}{=} 2\pi i\, a_{-1}$$