Blatt 7 Christian Merten, Julia Fila

A1	A2	A3	Σ

A1 Bew. Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(i\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist nach einem alten Blatt $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ für geeignete $a_n \in \mathbb{C}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann $f(x) = \overline{f(x)}$, also

$$\sum_{n\geq 0} \overline{a_n} x^n \underset{x\in\mathbb{R}}{=} \sum_{n\geq 0} \overline{a_n} \overline{(x^n)} = \overline{\sum_{n\geq 0} a_n x^n} = \overline{f(x)} = f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Da $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt enthält, folgt mit Identitätssatz für Potenzreihen, dass $\overline{a_n} = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ also $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei nun $y \in \mathbb{R}$ bel. Dann gilt

$$i^n = \begin{cases} i & n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & n \equiv 3 \mod 4 \\ 1 & n \equiv 0 \mod 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(iy) &= \sum_{n\geq 0} a_n (iy)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n i^n y^n \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(a_{4n} i^{4n} y^{4n} + a_{4n+1} i^{4n+1} y^{4n+1} + a_{4n+2} i^{4n+2} y^{4n+2} + a_{4n+3} i^{4n+3} y^{4n+3}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_{4n} y^{4n} + i \sum_{n\geq 0} a_{4n+1} y^{4n+1} - \sum_{n\geq 0} a_{4n+2} y^{4n+2} - i \sum_{n\geq 0} a_{4n+3} y^{4n+3} \end{aligned}$$

Da $f(iy), a_n, y \in \mathbb{R}$ folgt $\sum_{n\geq 0} a_{4n+1} y^{4n+1} - \sum_{n\geq 0} a_{4n+3} y^{4n+3} = 0$

also folgt $$\sum_{n\geq 0} a_n (iy)^n = \sum_{n\geq 0} \left(a_{4n} y^{4n} - a_{4n+2} y^{4n+2}\right) = \sum_{n\geq 0} a_{2n} (iy)^{2n}$$

Da $i\mathbb{R}$ einen HP enthält folgt erneut mit Identitätssatz $a_{2n+1} = 0$ $\forall n \geq 0$. Also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (-z)^{2n} = f(-z).$$

$\square$

(Genügt als Voraussetzung nicht bereits, dass eine bel. kleine in $\mathbb{R}$ (bzw. $i\mathbb{R}$) offene Umgebung U ex. mit $f(U) \subseteq \mathbb{R}$?)

A2 $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\geq 0} : D \to \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$

(a) Beh.: $(f_n)_{n\geq 0} \xrightarrow{\text{kompakt}} f \implies (f_n) \xrightarrow{\text{pktw.}} f$

Bew.: Für $z \in D$ ist $\{z\}$ beschr. und abgeschl., also kompakt. Daraus folgt die Beh.

(b) Beh.: $f_n \xrightarrow{\text{komp.}} f \iff f_n \xrightarrow{\text{lokal glm.}} f$

Bew. „$\Rightarrow$" Da D offen ex. $\forall z \in D \ \exists \varepsilon > 0$ s.d. $\overline{U_\varepsilon(z)} \subseteq D$. Da $\overline{U_\varepsilon(z)}$ kompakt und $U_\varepsilon(z) \subseteq \overline{U_\varepsilon(z)}$ folgt die Beh.

„$\Leftarrow$" Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ex. $\forall a \in K$ ein $U_a \subseteq D$ offen mit $a \in U_a$ und $f_n|_{U_a} \xrightarrow{\text{glm.}} f_{|U_a}$. Dann gilt außerdem $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a$. Da K kompakt, ex. $a_1, \dots, a_n$ s.d. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\forall i = 1, \dots, n \ \exists n_i \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq n_i$ und $z \in U_{a_i}$: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.
Setze nun $n_0 := \max_{i=1,\dots,n} n_i$. Dann gilt für $z \in K$ bel.: $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ s.d. $z \in U_{a_i}$ und $\forall n \geq n_0$ ist insbes. $n \geq n_i$ also $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

$\square$

(c) Beh.: $\sum_{n\geq 0} f_n$ konv. normal $\iff$ $\forall z_0 \in D \ \exists \ U \subseteq D$ offen mit $z_0 \in U$ und $(M_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d. $\sum_{n\geq 0} M_n$ konv. und $\sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq M_n \ \forall n \geq 0$.

Bew. „$\Rightarrow$" selbes Argument wie bei (b) „$\Rightarrow$".

„$\Leftarrow$" Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ex. $\forall a \in K$ ein $U_a \subseteq D$ offen mit $a \in U_a$ und ein $(M_{a,n})_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n\geq 0} M_{a,n}$ konv. und $\sup_{z \in U_a} |f_n(z)| \leq M_{a,n} \ \forall n \geq 0$. Dann ist $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a$. Da K komp. ex. $a_1, \dots, a_k$ sd $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}$. Dann setze

$M_n := \max_{i \in \{1,\dots,k\}} M_{a_i,n}$. Dann ist $M_n \leq \sum_{i=1}^{k} M_{a_i,n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n\geq 0} M_{a_i,n}$ konvergent und k endlich folgt $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=1}^{k} M_{a_i,n} \right)$ konvergent, insbes. $\sum_{n\geq 0} M_n$ konvergent.

Außerdem gilt für $z \in K$ bel., dass $z \in U_{a_i}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Also $|f_n(z)| \leq M_{a_i,n} \leq M_n \ \forall n \geq 0$. Also insbes. $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq M_n \ \forall n \geq 0$.

(d) Beh. $\sum f_n$ konv. normal $\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)_{N\geq 0}$ konv. kompakt gegen $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Bew. Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ex. eine Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d.

$\sum_{n\geq 0} M_n$ konv. und $\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq M_n \quad \forall n\geq 0$. Zunächst ist

$\left|\sum_{n\geq 0} f_n(z)\right| \leq \sum_{n\geq 0} |f_n(z)| \leq \sum_{n\geq 0} M_n \quad \forall z\in K$. Also $\sum_{n\geq 0} f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert.

Nun betrachte:
$$\sup_{z\in K} \left| \sum_{n\geq 0} f_n(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z)\right| = \sup_{z\in K} \left|\sum_{n\geq N+1} f_n(z)\right|$$
$$\leq \sup_{z\in K} \sum_{n\geq N+1} |f_n(z)|$$
$$\leq \sup_{z\in K} \sum_{n\geq N+1} M_n$$
$$= \sum_{n\geq N+1} M_n$$
$$= \underbrace{\sum_{n\geq 0} M_n - \sum_{n=0}^{N} M_n}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0}$$

Also folgt $\sum_{n=0}^{N} f_n$ konv. glm. auf K gegen $\sum_{n\geq 0} f_n$.

$\square$

A3 (a) Beh. $(f_n)_{n\geq 0}$ holomorph mit $f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f: D \to \mathbb{C} \Rightarrow f_n' \xrightarrow{\text{kompakt}} f'$

Bew. Nach A2 b) genügt es lokale glm. Konv. zu zeigen. Dazu sei $z_0 \in D$. Da D offen, ex. ein $r > 0$ sd. $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Es ist $\overline{U_{2r}(z_0)}$ kompakt, d.h. es ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sd. $\forall n \geq n_0$: $\sup_{w \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(w) - f(w)| < \frac{r\varepsilon}{2}$. Dann gilt $\forall n \geq n_0$:

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z) - f'(z)| \overset{CIF}{=} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2r}} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2r}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \int_{\gamma_{2r}} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right|$$

Für $z \in U_r(z_0)$ und $w \in \partial U_{2r}(z_0)$ ist $|w - z| \geq r$ und $|f_n(w) - f(w)| < \frac{r\varepsilon}{2}$.

Mit $\ell(\gamma) = 4\pi r$ folgt mit Standardabschätzung:

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \frac{r\varepsilon}{2r^2} \cdot 4\pi r = \varepsilon$$

$\square$

(b) Bew. Es ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ konv. kompakt nach A2 (d) gegen F. Als endl. Summe holom. Fkt. ist F_N holomorph $\forall N \geq 0$. Dann liefert Weierstraß: F auf D holomorph und $F_N' \xrightarrow{\text{komp}} F'$. Es ist $F_N'(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n'(z)$ und F_N' konv. kompakt, also insbes. punktweise, also $F_N'(z) \xrightarrow{N \to \infty} \sum_{n\geq 0} f_n'(z)$ $\forall z \in D$. Da $\mathbb{C}$ hausdorffsch sind Grenzw. eindeutig, also folgt $F'(z) = \sum_{n\geq 0} f_n'(z)$.

b.z.z. $\sum_{n\geq 0} f_n'(z)$ konv. normal. Nach A2(c) genügt es das lokal zu zeigen, d.h. sei $z_0 \in D$ bel. und $r > 0$ sd. $\overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$. Es ist $\overline{U_{2r}(z_0)}$ kompakt, d.h. es ex. eine Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n\geq 0} M_n$ konv. und $\sup_{z \in \overline{U_{2r}(z_0)}} |f_n(z)| \leq M_n$ $\forall n \geq 0$. Dann analog zu (a) mit CIF:

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in U_r(z_0)} \left| \int_{\gamma_{2r}} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| \overset{\text{Standard}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{2r^2} 4\pi r = \frac{2M_n}{r} \quad \forall n \geq 0.$$

Da $\sum_{n\geq 0} M_n$ konv., konv. auch $\sum_{n\geq 0} \frac{2M_n}{r}$, also konv. $\sum_{n\geq 0} f_n'(z)$ normal.

$\square$