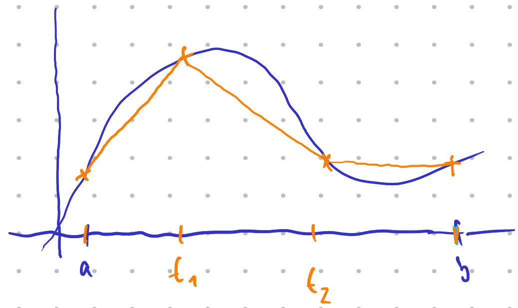
VL Woche 21. und 23.4.21

Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Kurve: $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.
  - $\to$ γ stetig diff'bar $\overset{df}{\iff}$ $\gamma_1, \dots, \gamma_n : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar $\overset{df}{\iff}$ $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$
  - $\to$ $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ Tangentialvektor
  - $\to$ $v(t) = |\gamma'(t)| : I \to \mathbb{R}$ Geschwindigkeit
  - $\to$ γ regulär $\overset{df}{\iff}$ $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
- Längen von Kurven / Rektifizierbarkeit

  $Z = (t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ Zerlegung von I, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Kurve

  $\to$ $L(Z, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$



  $\to$ γ rektifizierbar mit Bogenlänge $L(\gamma)$

  $\overset{df}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. $\forall$ Zerlegungen Z mit $\max_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$

  $\implies |L(Z, \gamma) - L(\gamma)| < \varepsilon$

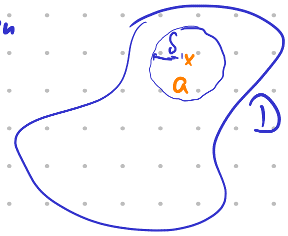
  "$\iff$ $L(Z_\delta, \gamma) \xrightarrow{\delta \to 0} L(\gamma)$"

  $\to$ gute Nachricht: jede Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist rektifizierbar mit Länge

  $$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

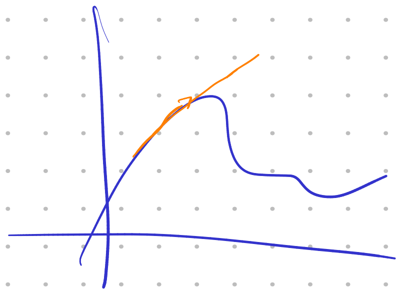
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$



Betrachte $f_{a,v}: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(a+tv)$

- Falls $f_{a,v}$ in $t=0$ diff'bar, dann heißt

$$D_v f(a) := f'_{a,v}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$



Richtungsableitung von f in a in Richtung v.

→ f partiell diff'bar $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $D_{e_1} f(a), \dots, D_{e_n} f(a)$ existieren

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a)$

(stetig) partiell diff'bar auf D $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ f in jedem Punkt (stetig) partiell diff'bar

→ f partiell diff'bar: $\nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

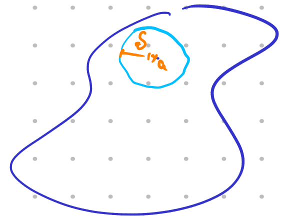
Gradient von f in a.

Analog für $f: D \to \mathbb{R}^n$: f (stetig) partiell diff'bar $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ f_i (stetig) part. diff'bar $\forall i$

$$\longrightarrow \operatorname{div} f(a) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) = \langle \nabla, f \rangle \quad \text{wobei } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

(Totale) Differenzierbarkeit

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen



f in $a \in D$ diff'bar $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ lin. Abb. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine Abb. $\varphi: B_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

i) $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \varphi(h)$ $\quad \forall h \in B_\delta(0)$

ii) $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{h\to 0} \dfrac{\varphi(h)}{|h|} = 0$

n=1: Taylor:
$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + R(x,h)$

Dann setze $Df(a) := L$. Differential von f in a.

A2) a) $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| = \sum_{i=1}^n x_i^2$ stetig part. diff'bar, da

$$D_{e_i} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}_{x,i}(x_i + t) - \tilde{f}_{x,i}(x_i)}{t} = \tilde{f}_{x,i}'(x_i)$$

wobei $\tilde{f}_{x,i}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y_i \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

und die $\tilde{f}_{x,i}$ alle stetig part. diff'bar.

Richtungsableitungen: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel.

$$D_v g(x) = \lim_{t\to 0} \frac{|x+tv| - |x|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{|x+tv|^2 - |x|^2}{|x+tv| + |x|} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{|x|^2 + 2\langle x, tv\rangle + |tv|^2 - |x|^2}{|x+tv| + |x|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{2t\langle x, v\rangle + t^2|v|^2}{|x+tv| + |x|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\langle x, v\rangle + \overbrace{t|v|^2}^{t\to 0:\ 0}}{|x+\underbrace{tv}_{t\to 0:\ 0}| + |x|}$$

$$= \frac{2\langle x, v\rangle}{2|x|}$$

$$= \frac{\langle x, v\rangle}{|x|}$$

$$\Rightarrow \nabla g(x) = \left(\frac{\langle x, e_1\rangle}{|x|}, \dots, \frac{\langle x, e_n\rangle}{|x|} \right) = \left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|} \right) = \frac{x^t}{|x|}$$ $\square$

b) $P: \underset{\mathbb{R}^{2n}}{\overset{}{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}} \to \mathbb{R}^n,\ (v,w) \mapsto v + w$. ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$) Dann ist für $x \in \mathbb{R}^{2n}$: $P(x) = (x_1 + x_{n+1}, \dots, x_n + x_{2n})$

Sei $v \in \mathbb{R}^{2n}$.
$$\lim_{t\to 0} \frac{P_i(x+tv) - P_i(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x_i + tv_i + x_{n+i} + tv_{n+i} - x_i - x_{n+i}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} (v_i + v_{n+i})$$

$$= P_i(v)$$

Für $v = e_j$ folgt $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = P_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ oder } i = n-j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ konstant, insb. stetig partl. diff'bar. $\square$

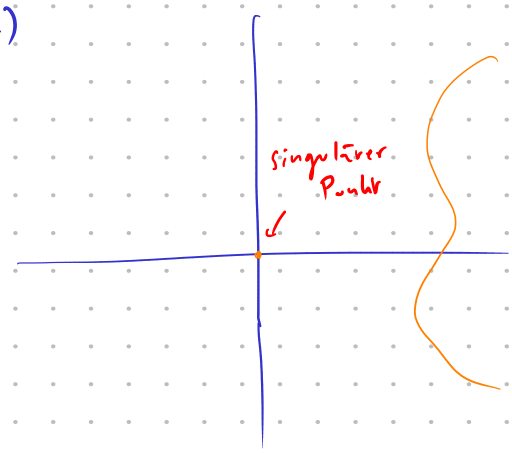
c) $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto |x|$. Für $x \neq 0$ ist $h(x) = g(x)$.

Für $x = 0$: Für $t_1^{(k)} := \frac{1}{k},\ t_2^{(k)} := -\frac{1}{k}$ ist $\lim_{k\to\infty} \frac{|t_1^{(k)} e_i|}{t_1^{(k)}} = 1 \neq -1 = \lim_{k\to\infty} \frac{|t_2^{(k)} e_i|}{t_2^{(k)}}$ $\square$

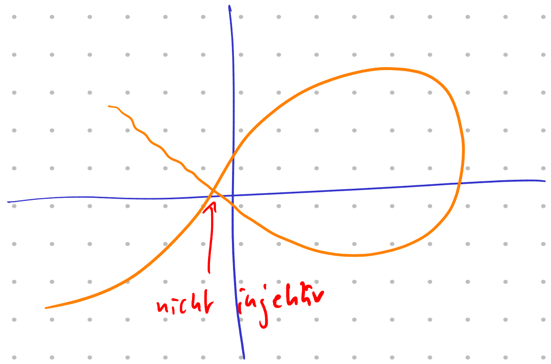
d) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = \|x\|_\infty = x_j$. Dann sei $t_1^{(n)} := \frac{1}{n},\ t_2^{(n)} := \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x + t_1^{(n)} e_i\|_\infty - \|x_i\|_\infty}{t_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_i + \frac{1}{n} - x_i}{1/n} = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_j - x_j}{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x - t_2^{(n)} e_i\|_\infty - \|x\|_\infty}{t_2^{(n)}}$$ $\square$

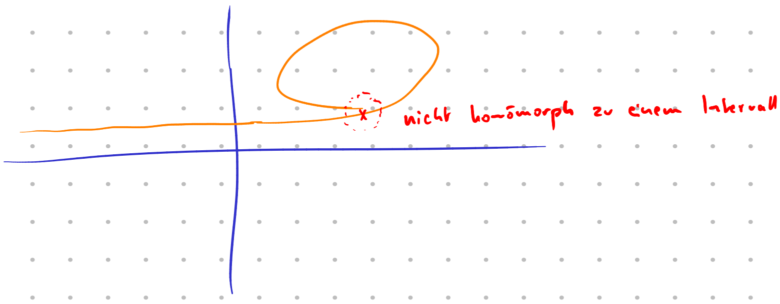
A1 a)



b)



c)



d) $s=0$, $t=2\pi$, dann ist $\dfrac{c(t)-c(s)}{t-s} = \dfrac{\binom{1}{0}-\binom{1}{0}}{2\pi} = \binom{0}{0} \neq \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$

da sin und cos keine gem. NS haben.

Also ex kein MWS für Kurven in der Form des MWS der Diff-rechnung. Die θ_i's für die einzelnen Komponenten aus deren MWS'en sind i.A. verschieden.