Heute: Frustcafé (deswegen kürzere Plenarübung)

Nächsten Mittwoch: Vorlesung fällt aus, aber Ersatztermin wird gesucht.

1 Reelle Zahlen

Fortsetzung Beweis:

Beweis. 1. Zz: $\forall[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists z \in \mathbb{R}$

$$z = \pm\left(z_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \ldots)\right).$$

O.B.d.A. $z > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ C.F.} \implies 0 < a_n < N\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\implies z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. O.B.d.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I_0$

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < N\}.$$

I_0 wird unterteilt in 10 Teilintervalle.
Für ein $d_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ ein Intervall

$$I_1 := \{x \in I_0 \mid z_0 + d_1 \cdot 10^{-1} \leq x < z_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1}\}.$$

Sei $z_1 = z_0 + 0, d_1$, dann

$$I_1 = \{x \in I_0 \mid z_1 \leq x < z_1 + 10^{-1}\}.$$

$\implies \exists n_1$ Index s.d. $|z_1 - a_{n_1}| \leq 10^{-1}$
usw. ...
Ergebnis: eine Folge von Teilintervallen
o.B.d.A.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ldots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \ldots \subset I_1 \subset I_0.$$

$$z_k := z_{k-1} + d_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

$$I_k = \{x \in I_{k-1} \mid z_k \leq x < z_k + 10^{-k}\}.$$

$\exists n_k$: Index s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$
Das heißt für eine Folge

$$z_k := z_0 + 0, d_1 d_2 \ldots d_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}.$$

existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von der C.F. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N} \implies (z_k - a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, d.h.
$\implies (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
$\implies (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\implies (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$
und der resultierende Dezimalbruch ist:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gezeigt:

$$\forall[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}\text{: } \exists z \in \mathbb{R}.$$

Damit: $\implies$ Abbildung ist surjektiv und damit bijektiv.

$$\implies \exists \text{ „inverse Abbildung"} : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}.$$

die auch bijektiv ist.

Diese Abbildung ist auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d.h. $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mapsto a$ und $[(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a']$

Dann $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := a + a'$
$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := a \cdot a'$

Abbildung $\mathbb{R} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist Isomorphismus. □

Bemerkung 1. Die Darstellung ist durch einen Dezimalbruch ist nicht immer eindeutig. z.B.:

$$0,9999\ldots = 0,\overline{9} = 1 = 1,0000\ldots.$$

Deshalb, falls $z = z_0 + 0, d_1 d_2 \ldots d_k 999\ d_k \leq 8$ dann:

$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \ldots (d_k + 1)0 \ldots$

Bemerkung 2. Der Satz gilt auch für „b-adische" Brüche mit Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2 : a \in \mathbb{R}$ besitzt eine sogenannte „b-adische Entwicklung":

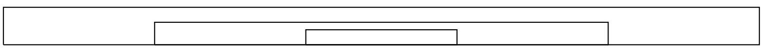
$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 \ldots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \ldots).$$

mit $a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + \ldots \in \mathbb{N}_0$ mit Ziffern $d_n, g_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ Für $b = 2$: dijadische Entwicklung

1.0.1 Zusammenfassung

Beobachtung: Jede reelle Zahl ist ein Grenzwert von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen.

Beispiel: $\sqrt{2}$



$\forall (a_n), (b_n)\ a_n \to a, b_n \to a \iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

Deshalb:

- Definiere C.F. rationaler Zahlen
- Äquivalenzrelation:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge }.$$

  und Äquivalenzklasse:

$$\overline{R} := \{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\}.$$

- Eine Klasse aus $\overline{\mathbb{R}} \iff$ eine reelle Zahl

Konstruktion nach Cantor, 1873

Als nächstes: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper mit „+ ", „·", „>" und ist auch „vollständig".

1.1 Der Körper $\mathbb{R}$

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige approximierende Folgen rationaler Zahlen.

Alle Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}$ sind über den Grenzübergang auf $\mathbb{R}$ übertragbar.

Definition 1 (Absolutbetrag)**.**

$$|a| := \lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Folglich: Begriffe „Konvergenz" und „Cauchy-Folgen" gelten auch für Folgen reeller Zahlen.

Definition 2 (Arithmetische Grundoperationen).

$$a + b := \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n).$$

$$a \cdot b := \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n).$$

Definition 3 (Ordnungsrelation).

$$a > b :\iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) > 0.$$

und folglich: $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+$ s.d. $a_n - b_n \geq \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$a \geq b :\iff a > b \text{ oder } a = b.$$

$$a < b :\iff b > a.$$

$$a \leq b :\iff b \geq a.$$

Definition 4 (Positivität).

$$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}.$$

Bemerkung 3. Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Folge:

Beispiel für Absolutbetrag. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei approximierende Folgen von a, d.h. $(a_n - a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Zu zeigen:

$$|a| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n|.$$

d.h. zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n|$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} (|a_n| - |a'_n|) = 0.$$

Betrachte:

$$||a_n| - |a'_n|| \leq |a_n - a'_n| < \epsilon.$$

$\implies (|a_n| - |a'_n|)$ ist Nullfolge
$\implies |a_n| = |a'_n|$
$\implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a'_n| = |a|$ □

Die anderen Beweise folgen analog.

Satz 1 (Der vollständige Körper $\mathbb{R}$).

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ ist angeordneter Körper
2. $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$
3. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.
4. Der Unterkörper $\mathbb{Q}$ ist „dicht" in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists g_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| < \epsilon.$$

Beweis. 1) Körperaxiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) sind trivial

Neutrales Element der Addition:

$$0 := 0, 0 \ldots \text{ Klasse der Nullfolgen z.B.: } a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1 := 1,0\dots0 \qquad [(1)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Addition

$$a + x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

$$x = -a = \lim_{n\to\infty}(-a_n).$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Multiplikation

$$b \cdot x = 1, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$x = \frac{1}{b} := \lim_{n\to\infty} c_n.$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \ ?\ .$$

$b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$
$\implies (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies$ fast alle Elemente $b_n \neq 0$ (Übung!)

Definiere:

$$c_n := \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ \frac{1}{b_n} & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

Dann $(b_n \cdot c_n) =$

$$(b_n \cdot c_n) = \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ 1 & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$\implies \lim_{n\to\infty}(b_n \cdot c_n) = 1$

2) $a \in \mathbb{Q}$ entspricht $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ mit $a_n = a\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ Körper
$\implies Q$ Unterkörper von $\mathbb{R}$.

3) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine C.F. reeller Zahlen.

$$\forall a_n \in \mathbb{R}\ \exists \text{ approx. Folge}(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}.$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{Q}.$$

$$a_n := \lim_{n\to\infty} a_{n,m} n \in \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $k_n \in \mathbb{N}$ mit:

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen, dass $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen eine C.F. ist.

Sei $\epsilon > 0$. Dann

$\square$