Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1. (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(a) = 0$ und $f(x) \neq 42 \ \forall x \in [a,b]$.

Beh.: $f(b) < 42$.

Beweis. Angenommen: $f(b) \geq 42$. Dann folgt mit ZWS: $\exists x \in [a,b]$, s.d. $f(x) = 42$. Widerspruch zu $f(x) \neq 42 \ \forall x \in [a,b]$. □

(b) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(42) > g(42)$ und $f(x) \neq g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Beh.: $f(x) > g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis. Angenommen: $\exists a \in \mathbb{R}$, s.d. $f(a) < g(a)$. Dann definiere $d(x) := f(x) - g(x)$. Wegen f, g stetig, ist auch d stetig.

O.B.d.A. $a < 42$. Dann wähle $b := 42$. Wegen $f(b) > g(b) \implies d(b) > 0$ und da $f(a) < g(a) \implies d(a) < 0$.

$\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists x' \in [a,b]$ mit $d(x') = 0 \implies f(x') = g(x')$. Widerspruch. □

Aufgabe 2. (a) Beh.: Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig-stetig.

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf $D \subset \mathbb{R}$. Dann $\exists L > 0$, s.d. $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in D$.

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$. Dann gilt $\forall x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta = \frac{\epsilon}{L}$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon.$$

□

(b) Beh.: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ bel. dann wähle $\delta := \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$. Dann gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \overset{\sqrt{x} \text{ monoton steigend}}{<} |\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}| = \left|\frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}\right| < \left|\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}\right| = \frac{\epsilon^2}{4} \cdot \frac{2}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

$\implies f$ gleichmäßig-stetig.

Sei nun $L \in \mathbb{R}$ beliebig und wähle $x := 0$. Dann gilt

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{\sqrt{y}}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y \searrow 0} \infty > L.$$

$\implies f$ in $x_0 = 0$ nicht Lipschitz-stetig. □

(c) Beh.: Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $D \subset \mathbb{R}$.

Sei $\epsilon > 0$ bel. dann ex. ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon \ \forall x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

Insbesondere für ein beliebiges $a \in D$ gilt also $\forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

$\implies f$ stetig. □

(d) Beh.: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. f ist als Polynom stetig. Wähle nun $\epsilon := 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann wähle $x > \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}$ und $y := x + \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| = \left|x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2\right| = \left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| > \left|1 - \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}\right| = 1 = \epsilon.$$

$\implies f$ nicht gleichmäßig stetig. □

Aufgabe 3. (a) *Beweis.*

- $\sin(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0 = 0$
- $\cos(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{0^{2k}}{(2k)!} = 1$
- $\sin(\pi) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0$
- $\sin(2\pi) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} \cdot \cos \pi + \cos \pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{=0} = 0$
- $\cos \pi = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} (*)$

$$\begin{aligned} & \cos \pi - \cos 0 = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ \implies & \cos \pi - 1 = -2 \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \overset{(*)}{\implies} & -\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1 = -2 \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \implies & \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \\ \overset{(*)}{\implies} & \cos \pi = -1. \end{aligned}$$

- $\cos 2\pi = \underbrace{\cos \pi \cdot \cos \pi}_{=1} - \underbrace{\sin \pi \cdot \sin \pi}_{=0} = 1$
- $\sin \frac{3}{2}\pi - \sin \frac{\pi}{2} = 2 \cos(\pi) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \overset{\cos \pi = -1}{\implies} \sin \frac{3}{2}\pi = -\sin \frac{\pi}{2}$
- $\sin 2\pi - \sin \pi = 0 = 2 \cos \frac{3}{2}\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \overset{\sin \frac{\pi}{2} \neq 0}{\implies} \cos \frac{3}{2}\pi = 0$
- Aus VL folgt $\sin x > 0 \ \forall x \in]0, 2[$ und $\frac{\pi}{2} \in]0, 2[\implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$ und damit $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$.

□

(b) *Beweis.* Mit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und (a) folgen direkt

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$
- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$
- $e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

□

Aufgabe 4. (a) $f(x) = (x^x)^x = e^{\ln(x) \cdot x^2}$, $x > 0$. Mit Ketten- und Produktregel folgt

$$f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^2}(x + 2x \cdot \ln(x)) = (x^x)^x (x + 2x \ln x).$$

(b) $f(x) = \ln(x)^x = e^{\ln(\ln x) \cdot x}$, $x > 0$. Mit Ketten- und Produktregel folgt

$$f'(x) = \ln(x)^x \left(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \ln(\ln(x))\right) = \ln(x)^x \left(\frac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x))\right).$$

(c) $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - x}{x^3 + 1}$, $x \neq -1$. Mit Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 6x^2 - 1)(x^3 + 1) - (x^4 + 2x^3 - x)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x^6 + 6x^3 + 6x^2 - 1}{x^6 + 2x^3 + 1}.$$

(d) $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, $x > 0$. Mit Produktregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + (\sqrt{x}+1)\left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x-1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

(e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$, $x > 0$. Mit Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - \ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2(1-\ln(x))}{x(1+x^2)^2}.$$

(f) $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)} = e^{\ln(\sin(x))\cdot\cos(x)}$, $x \in \{0 < x - 2\pi k < \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Mit Ketten- und Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x)^{\cos(x)}\left(\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)\cdot\cos(x) - \ln(\sin(x))\cdot\sin(x)\right) \\ &= \sin(x)^{\cos(x)}\left(\cot(x)\cdot\cos(x) - \ln(\sin(x))\cdot\sin(x)\right) \\ &= \sin(x)^{\cos(x)+1}(\cot(x)^2 - \ln(\sin(x))). \end{aligned}$$

Für $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} D_h f(2\pi k) = D_h f(0) &= \frac{\sin(h)^{\cos(h)} - \sin(0)^{\cos(0)}}{h} \\ &= \frac{e^{\ln(\sin(h))\cdot\cos(h)}}{e^{\ln(h)}} \\ &= e^{\underbrace{\ln(\sin(h))}_{\to\ln(h)}\cdot\underbrace{\cos(h)}_{\to 1} - \ln(h)} \xrightarrow{h\to 0} e^0 = 1. \end{aligned}$$

$\implies f'(2\pi k) = 1$.

Für $\pi \leq x - 2\pi k < 2\pi$: $\sin(x) < 0 \implies \sin(x)^{\cos(x))} \notin \mathbb{R}$.

(g) $f(x) = \ln(\tan(x)) - \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Mit Quotientenregel folgt für $(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Damit folgt mit Ketten- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\tan(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{2\sin(2x)\cdot\sin^2(2x) - \cos(2x)\cdot 2\sin(2x)\cdot 2\cos(2x)}{\sin^4(2x)} \\ &= 2\cdot\frac{\cos^2(2x)+1}{\sin^3(2x)\sin(x)\cos(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (a) Beh.: $f_n(x) := |\cos^n(x)|$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert auf dem Intervall $D := [0,\pi]$ punktweise gegen $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \{0,\pi\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, aber nicht gleichmäßig.

Beweis. Sei $0 < \epsilon < 1$ und $x \in [0,\pi]$ beliebig. Für $x \in \{0,\pi\}$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\cos^n(x) - f(x)| = |1^n - 1| = 0 < \epsilon.$$

Für $0 < x < \pi$: Wähle $n_\epsilon := \left\lceil \frac{\ln(\epsilon)}{\ln|\cos(x)|} \right\rceil$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\cos^n(x)| \overset{|\cos(x)|<1}{<} |\cos^{n_\epsilon}(x)| \leq \left|\cos^{\frac{\ln(x)}{\ln|\cos(x)|}}\right| = e^{\frac{\ln(\epsilon)}{\ln|\cos(x)|}\ln|\cos(x)|} = \epsilon.$$

$\implies f_n(x)$ punktweise konvergent

Sei nun $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ beliebig. Definiere $\zeta = e^{\frac{\ln(\epsilon)}{n_\epsilon}} > 0$. Wegen $\epsilon < 1 \implies \ln(\epsilon) < 0 \implies \zeta < 1$. Damit definiere $\xi := \arccos(\zeta)$. Dann gilt $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit $x < \xi$:

$$|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| = |\cos^{n_\epsilon}(x)| > \left|\cos^{n_\epsilon}\left(\arccos\left(e^{\frac{\ln(\epsilon)}{n_\epsilon}}\right)\right)\right| = e^{\frac{\ln(\epsilon)}{n_\epsilon}\cdot n_\epsilon} = \epsilon.$$

$\implies f_n$ nicht gleichmäßig konvergent. $\square$

(b) Beh.: $f_n(x)$ konvergiert auf dem Intervall $\widetilde{D} := \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ gleichmäßig mit $f(x) = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $n_\epsilon := \left\lceil \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} \right\rceil$. Sei nun $x \in \widetilde{D}$ bel. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\cos^n(x)| \\
&\overset{|\cos(x)|<1}{<} |\cos^{n_\epsilon}(x)| \\
&\leq e^{\ln|\cos(x)| \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}} \\
&\overset{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > |\cos(x)|}{\leq} e^{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

$\implies f_n$ gleichmäßig konvergent. $\square$