Bitte korrigieren.

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: $M \coloneqq \partial(K_1(0) \setminus \{0\})$ ist nicht zusammenhängend.

Beweis. $U \coloneqq \{0\}$ und $V \coloneqq \partial K_1(0)$ sind relativ offen bezügl. M, $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$. $\square$

(b) Beh.: $M \coloneqq \overline{K_1(0) \cap K_1((2,0)^T)}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Es ist $K_1(0) \cap K_1((2,0)^T) = \emptyset$, also $M = \emptyset$. Also existieren keine nicht-leeren Teilmengen U und V mit $U \cap V = \emptyset = M$. Also ist M zusammenhängend. $\square$

(c) Beh.: $M \coloneqq \bigcup\limits_{a \in \mathbb{Z}^2} \overline{K_{\frac{1}{2}}(a)}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Die abgeschlossenen Kugeln berühren sich gegenseitig und sind damit nicht in disjunkte offene Teilmengen zerlegbar. $\square$

(d) Beh.: $M \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right\} \cup \{(0,0)^T\}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Es ist $\mathbb{R}_+$ zusammenhängend und $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R}_+$ stetig, also $M_1 \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\}$ zusammenhängend.

Ang.: $\exists U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $U \cup V = M$, $U \cap V = \emptyset$ und U, V relativ offen. Falls $(0,0)^T \notin U$ und $(0,0)^T \notin V$: ↯ zum Zusammenhang von M. Sei also O.E. $(0,0)^T \in U$. $x_1^{(k)} = \frac{1}{2\pi k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$ folgt $\sin\left(\frac{1}{x_1^{(k)}}\right) = \sin(2\pi k) = 0$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \sin\left(\frac{1}{x_1^{(k)}}\right)\end{pmatrix} \in V$, sonst $U \cap V \neq \emptyset$. Da aber U offen und $\forall \epsilon > 0$, $\exists k_0 > 0$ und $m \in \mathbb{R}$, s.d. $\forall k \geq k_0$ gilt

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \sin(2\pi k)\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ 0\end{pmatrix}\right\| \leq m \left\|\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ 0\end{pmatrix}\right\|_\infty = m|x_1^{(k)}| < \epsilon.$$

Damit folgt $U \supseteq K_\epsilon(0) \cap V \neq \emptyset$ ↯. $\square$

Aufgabe 2. (a) Es seien $f_k \colon \mathbb{R}^3 \setminus M \to \mathbb{R}$ und $M \coloneqq \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}$.

(i) Beh.: $f_1(x,y,z) \coloneqq \frac{xz^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ ist nicht stetig fortsetzbar in $(0,0,0)^T$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wähle

$$a_n \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{1}{n^3} \\ 0 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus M \text{ es gilt: } a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Aber

$$f_1(a_n) = \frac{\frac{1}{n^3 + \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{n^6}{n^5} = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty > c.$$

$\square$

(ii) Beh.: $f_2(x,y,z) \coloneqq \frac{xyz + xy^2}{x^2 + y^2}$ ist mit $f_2(0,0,0) = 0$ stetig fortsetzbar.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig dann wähle $\delta := \frac{\epsilon}{2}$. Dann folgt $\forall (x,y,z)^T \in \mathbb{K}^n$ mit $\left\|(x,y,z)^T - 0\right\|_\infty = \|(x,y,z)\|_\infty < \delta$: Falls $x \geq z$:

$$\left|\frac{xyz + xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xyz| + |xy^2|}{x^2+y^2} = \frac{|z|+|y|}{\frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|}} \leq \frac{|z|+|y|}{\frac{|x|+|y|}{\delta}} = \frac{\delta(|z|+|y|)}{|x|+|y|} \leq \frac{\delta(|x|+|y|)}{|x|+|y|} = \delta < \epsilon.$$

Falls $y > x$:

$$\left|\frac{xyz + xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xyz| + |xy^2|}{x^2+y^2} = \frac{|z|+|y|}{\frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|}} \leq \frac{|z|+|y|}{\underbrace{\frac{|x|}{|y|}}_{\leq 1} + 1} \leq |z| + |y| \leq 2\delta = \epsilon.$$

Falls $z > x$ und $y \leq x$:

$$\left|\frac{xyz + xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xyz|}{x^2+y^2} + \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq |z|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |z|\frac{y^2}{x^2+y^2} = |z| \leq \delta < \epsilon.$$

Also f_2 stetig fortsetzbar in $(0,0,0)^T$. □

(b) Beh.: Auf dem Produktraum $P := \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ ist $f\colon P \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (x,y)_K$ stetig. Hier ist $(\cdot,\cdot)_K$ Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ mit $(x,x)_K = \|x\|_K^2$.

Beweis. Sei $\{x,y\} \in P$ und $\{x_n, y_n\} \in P$ beliebig mit $\{x_n, y_n\} \xrightarrow{n\to\infty} \{x,y\}$. Damit folgt:

$$\|\{x_n,y_n\} - \{x,y\}\|_P = (\underbrace{\|x_n - x\|_K^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|y_n - y\|_K^2}_{\geq 0})^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit folgt $\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\|y_n - y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wegen $(x,x)_K = \|x\|_K^2 \ \forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|f(x_n,y_n) - f(x,y)| &= |(x_n,y_n)_K - (x,y)_K| \\
&= |(x_n,y_n)_K - (x_n,y)_K + (x_n,y)_K - (x,y)_K| \\
&= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \underbrace{\|x_n\|_K}_{\xrightarrow{n\to\infty}\|x\|_K} \underbrace{\|y_n - y\|_K}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} + \|y\|_K \underbrace{\|x_n - x\|_K}_{\xrightarrow{n\to\infty}0} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass f stetig ist in $\{x,y\}$. □

Aufgabe 3. (a) Beh.: Sei $T\colon \partial K_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ex. ein $x \in \partial K_R(0)$ mit $T(x) = T(-x)$.

Beweis. Es ist $\partial K_R(0)$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Da T stetig, existieren also $x_{\min}, x_{\max} \in \partial K_R(0)$ mit $\max\limits_{x\in\partial K_R(0)} T(x) = T(x_{\max})$ und $\min\limits_{x \in \partial K_R(0)} T(x) = T(x_{\min})$.

Definiere $f\colon \partial K_R(0) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto T(x) - T(-x)$. Falls $f(x_{\max}) = 0$ oder $f(x_{\min}) = 0$, folgt die Behauptung. Sonst gilt

$$f(x_{\max}) \cdot f(x_{\min}) = 0.$$

Denn falls $T(x_{\max}) > 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
f(x_{\max}) &= T(x_{\max}) - T(-x_{max}) > 0 \\
f(x_{\min}) &= T(x_{\min}) - T(-x_{\min}) < 0.
\end{aligned}$$

Analog für $T(x_{\max}) < 0$. Da $\partial K_R(0)$ zusammenhängend und T stetig, folgt mit Zwischenwertsatz, dass $\exists \xi \in \partial K_R(0)$ mit $f(\xi) = 0 \implies T(\xi) = T(-\xi)$. □

(b) Seien $f, g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere für $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\varphi(x) := \max(f(x), g(x)).$$

Beh.: $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Zunächst gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2},$$

denn: O.E.: $a \geq b$. Dann ist

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a = \max(a,b).$$

Damit folgt

$$\varphi(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}.$$

Da f, g stetig, ist auch $|f-g|$ stetig und da $2 \neq 0$ folgt φ als Summe bzw. Quotient stetiger Funktionen stetig. $\square$

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{K}^n \to D \subseteq \mathbb{K}^n$ beliebig und $g\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig und injektiv, wobei D kompakt ist.

Beh.: $g \circ f$ stetig $\implies$ f stetig und $g \circ f$ gleichmäßig stetig $\implies$ f gleichmäßig stetig.

Beweis. Definiere $B := \operatorname{im}(g)$ und $\tilde{g}\colon D \to B$, $x \mapsto g(x)$. Da g injektiv und stetig, ist auch $\tilde{g}$ injektiv und stetig. Inbes. ex. $\tilde{g}^{-1}\colon B \to D$ mit $\tilde{g}^{-1}$ stetig.

Damit gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n$: $\tilde{g}^{-1}(g(f(x))) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}(f(x))) = f(x)$. Also $f = \tilde{g}^{-1} \circ g \circ f$.

Sei nun $g \circ f$ stetig. Dann folgt

$$f = \underbrace{\tilde{g}^{-1}}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{g \circ f}_{\text{stetig}}.$$

Also f als Komposition von zwei stetigen Funktionen stetig.

Sei nun $g \circ f$ gleichmäßig stetig. Da D kompakt und g stetig, ist $B = \operatorname{im}(g)$ auch kompakt. Also wegen $\tilde{g}^{-1}$ stetig, $\tilde{g}^{-1}\colon B \to D$ gleichmäßig stetig. Damit folgt

$$f = \underbrace{\tilde{g}^{-1}}_{\text{glm. stetig}} \circ \underbrace{g \circ f}_{\text{glm. stetig}}.$$

Also f als Komposition zweier gleichmäßig stetiger Funktionen, gleichmäßig stetig. $\square$