Christian Merten

Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
PROF. DR. A. SCHMIDT
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 2
Abgabe: *Freitag, 30.04.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Lemma 3.7). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln und N ein weiterer A-Modul. Zeigen Sie, dass ein natürlicher Isomorphismus

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$$

von A-Moduln existiert. *Hinweis:* Konstruieren Sie vermöge universeller Eigenschaften Abbbildungen in beide Richtungen und zeigen Sie anschließend, dass diese invers zueinander sind. Alternativ zeigen Sie, dass einer der beiden die universelle Eigenschaft des anderen besitzt.

Aufgabe 2 (Wohldefiniertheit des Ranges). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und seien $m,n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus $A^m \cong A^n$ (als A-Moduln) bereits $m = n$ folgt. *Hinweis:* Tensorieren sie mit dem Quotienten nach einem maximalen Ideal und benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Einheiten in Polynomringen). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und sei $A[T]$ sein Polynomring in einer Unbestimmten T. Zeigen Sie, dass ein Polynom $f = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n \in A[T]$ genau dann eine Einheit ist, wenn a_0 eine Einheit in A ist und die übrigen Koeffizienten $a_1,\ldots,a_n$ nilpotent sind.
Hinweis: Betrachten Sie für eine Richtung zunächst den Fall, dass A nullteilerfrei ist. Der allgemeine Fall lässt sich auf diesen Spezialfall reduzieren, indem man das Bild von f in $A/\mathfrak{p}[T]$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von A betrachtet. Für die andere Richtung verwenden Sie Aufgabe 3 von Blatt 1.

Aufgabe 4 (Zariski-Topologie[1]). **(6 Punkte)**
Seien A ein Ring und $\operatorname{Spec}(A)$ die Menge aller Primideale von A. Für jede Teilmenge M von A bezeichne $V(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid M \subseteq \mathfrak{p}\}$ die Menge aller Primideale von A, die M enthalten. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{a}$ das von M erzeugte Ideal, so ist $V(M) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.

(b) Es ist $V(0) = \operatorname{Spec}(A)$ und $V(1) = \varnothing$.

(c) Für eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von A gilt

$$V\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(M_i).$$

(d) Für Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von A ist $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Führen Sie sich nun vor Augen, dass die Aussagen (b)–(c) implizieren, dass die Mengen $V(M)$ die Axiome für abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes erfüllen. Die entsprechende Topologie heißt *Zariski-Topologie* und wir nennen $\operatorname{Spec}(A)$ das *Spektrum* von A.

---

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

A1/ A komm. Ring, $(M_i)_{i \in I}$ A-Moduln. N A-Modul.

Zz:
$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N)$$

Bew.: Setze $f : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \times N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$
$$((m_i)_{i\in I}, n) \longmapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}$$

Es ist f offensichtlich bilinear.

Also ex. nach univ. Eigensch. d. Tensorprodukts ein A-Mod.hom $\phi : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$

mit $f \overset{(*)}{=} \phi \circ \tau$ wobei $\tau : \left(\bigoplus M_i\right) \times N \longrightarrow \left(\bigoplus M_i\right) \otimes N$
$$(m, n) \longmapsto m \otimes n .$$

Bezeichne im Folgenden mit $q_i : M_i \otimes_A N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$ mit $q_i((m \otimes n))_j = \begin{cases} m \otimes n & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann setze $g_i : M_i \otimes_A N \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N$ mit $g_i(m_i \otimes_A n) = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{m_i}, 0, \dots, 0) \otimes n$

Die g_i sind offensichtl. A-Modhoms. Das heißt nach der univ. Eig. der direkten Summe

$\exists!\ \psi : \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N) \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N$ mit $g_i \overset{(*)}{=} \psi \circ q_i$ und ψ A-Modhom.

b.zz. $\psi \circ \phi = id$ und $\phi \circ \psi = id$

Es genügt $\psi \circ \phi = id$ auf einfachen Tensoren zu prüfen, da ψ, ϕ A-Modhoms. Seien also $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ und $n \in N$ bel. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\psi(\phi((m_i)_{i\in I} \otimes n)) = \psi(\phi(\tau((m_i)_{i\in I}, n))) &\overset{(*)}{=} \psi(f((m_i)_{i\in I}, n)) \\
&= \psi((m_i \otimes n)_{i\in I}) \\
&= \psi\left(\sum_{i\in I} q_i(m_i \otimes n)\right) \\
&= \sum_{i\in I} \psi(q_i(m_i \otimes n)) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i\in I} g_i(m_i \otimes n) \\
&= \sum_{i\in I} ((0, \dots, m_i, \dots, 0) \otimes n) \\
&= (m_i)_{i\in I} \otimes n
\end{aligned}$$

Nun zz. $\phi \circ \psi = id$. Dazu sei $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$. Es genügt wieder einfache Tensoren zu betrachten, d.h. sei oE $x_i = m_i \otimes n$ für $m_i \in M_i$.

Dann gilt
$$\begin{aligned}
\phi(\psi(x)) = \phi(\psi((m_i\otimes n)_{i\in I})) &= \phi(\psi(\sum_{i\in I} q_i(m_i\otimes n))) \\
&= \phi(\sum_{i\in I} \psi(q_i(m_i\otimes n))) \\
&\overset{(\ast)}{=} \phi(\sum_{i\in I} g_i(m_i\otimes n)) \\
&= \phi((m_i)_{i\in I}\otimes n) \\
&= \phi(\tau((m_i)_{i\in I}, n)) \\
&\overset{(\ast)}{=} f((m_i)_{i\in I}, n) \\
&= (m_i\otimes n)_{i\in I} \\
&= x
\end{aligned}$$

Das heißt ϕ ist A-Mod. isom. und da durch univ. Eigen. eind. bestimmt auch kanonisch. $\square$

<u>A2</u>/ A komm. Rg., $m,n\in\mathbb{N}$, $A\neq 0$.

Zz: $A^m \cong A^n$ als A-Moduln $\Rightarrow$ $m=n$.

<u>Bew</u> $A^m = \bigoplus_{i=1}^m A$ und $A^n = \bigoplus_{i=1}^n A$. Sei $I \subseteq A$ max. Ideal (ex. da $A\neq 0$).

Dann ist
$$(A/_I)^n \overset{VL}{\cong} (A\otimes_A A/_I)^n \overset{A1}{\cong} A^n \otimes_A A/_I \overset{A^n\cong A^m}{\cong} A^m \otimes_A A/_I \overset{A1}{\cong} (A\otimes_A A/_I)^m \overset{VL}{\cong} (A/_I)^m$$

$\Rightarrow (A/_I)^n \cong (A/_I)^m$ als A-Moduln. Also ex. ein $\psi: (A/_I)^n \longrightarrow (A/_I)^m$ A-Modhom. Dieser wird auf kanon. Weise zum $A/_I$-Modhom, denn für $\psi(\bar{a}m) = \psi(am + Im) = a\psi(m) + I\psi(m) = \bar{a}\psi(m)$.

D.h. $(A/_I)^n \cong_{A/_I} (A/_I)^m$. Da I Max. ideal also $A/_I$ Kp, folgt $n = \dim_{A/_I}(A/_I)^n = \dim_{A/_I}(A/_I)^m = m$. $\square$

A3 A komm Ring $f = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n \in A[T]$

Zz: $f \in A[T]^\times \iff a_0 \in A^\times$ und $a_1, \dots, a_n$ nilpotent.

Bew. „$\Leftarrow$": $a_0 \in A^\times$ d.h. $a_0 \in A[T]^\times$ und $a_1 T, \dots, a_n T^n$ nilpotent, da $a_1, \dots, a_n$ nilpotent und nilpotente El. in $A[T]$ bilden Ideal, d.h. $a_1 T + \dots + a_n T^n$ nilpotent.

$\overset{\text{B1 A3}}{\Rightarrow} f = a_0 + (a_1 T + \dots + a_n T^n) \in A[T]^\times$.

„$\Rightarrow$" Sei $f \in A[T]^\times$. Nun falls A nullteilerfrei, insb. $A[T]$ nullteilerfrei. Sei $h \in A[T]$ mit $1 = fh$

$\overset{A[T] \text{ nullt.fr.}}{\Rightarrow} \quad 0 = \deg(fh) = \deg f + \deg h \Rightarrow \deg f = \deg h = 0$

$\Rightarrow f \in A^\times \Rightarrow a_0 = f \in A^\times$ und $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Im Allgemeinen sei $p \subseteq A$ Primideal. Sei $\bar{f} \in A/p\,[T]$ das Bild von f unter der kan. Proj. $A \twoheadrightarrow A/p$. Da $f \in A[T]^\times$ $\exists$ $h \in A[T]$ mit $1 = fh$

$\Rightarrow \bar{1} = \bar{f}\bar{h} \Rightarrow \bar{f} \in A/p\,[T]^\times$. Nun ist A/p nullteilerfrei, d.h. $\bar{a}_0 \in (A/p)^\times$ und $a_1, \dots, a_n \in p$ $\forall p \subseteq A$ Primideal

- Da Nilradikal $N = \bigcap_{\substack{p \subseteq A \\ p \text{ Primideal}}} p \Rightarrow a_1, \dots, a_n$ nilpotent.

- Da $\bar{a}_0 \in (A/p)^\times$ ist $\bar{a}_0 \neq \bar{0} \in A/p$ also $a_0 \notin p$ $\forall p \subseteq A$ Primideal, d.h. insb. ist a_0 in keinem Maximalideal $\subseteq A$ enthalten, d.h. $a_0 \in A^\times$.

$\square$

A4| A Ring. $\mathrm{Spec}(A)$ Menge der Primideale von A. Für $M \subseteq A$

$V(M) := \{ p \in \mathrm{Spec}(A) \mid M \subseteq p \}$

(a) Zz: Ist $a = (M)$ so folgt $V(M) = V(a) = V(r(a))$

Bew: Es ist $M \subseteq a \subseteq r(a)$. D.h. $V(r(a)) \subseteq V(a) \subseteq V(M)$.

b.zz $V(M) \subseteq V(r(a))$. Sei dazu $p \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $M \subseteq p$.

Sei $x \in r(A)$. Dann ist $x^n \in (M)$, d.h. $x^n = \sum_{\text{endl.}} a_i m_i$ für $a_i \in A$, $m_i \in M$.

Da $M \subseteq p$ und p Ideal folgt $x^n \in p$ und da p Primideal folgt $x \in p$.

Also $r(A) \subseteq p$ und damit $V(r(a)) \subseteq V(M)$. $\square$

(b) Zz $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$.

Bew: $V(0) = \{ p \in \mathrm{Spec}(A) \mid 0 \in p \} \overset{p \text{ Ideale}}{=} \mathrm{Spec}(A)$

Zz $V(1) = \emptyset$

Bew. Da für $p \in \mathrm{Spec}(A)$ $p \neq A$ gilt folgt $1 \notin p$ und damit $V(1) = \emptyset$ $\square$

(c) Sei $(M_i)_{i \in I}$ Teilmengen von A.

Beh. $$V\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$

Bew Sei $p \in \mathrm{Spec}(A)$. Dann gilt

$$p \in V\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) \iff M_i \subseteq p \ \forall i \in I \iff p \in V(M_i) \ \forall i \in I \iff p \in \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$ $\square$

(d) Seien $a, b \subseteq A$ Ideale.

Beh $V(a \cap b) = V(ab) = V(a) \cup V(b)$.

Bew: Es ist $ab \subseteq a \cap b$, d.h. $V(a \cap b) \subseteq V(ab)$ und

$a \cap b \subseteq a$ und $a \cap b \subseteq b$, d.h. $V(a \cap b) \supseteq V(a) \cup V(b)$

$\Rightarrow V(a) \cup V(b) \subseteq V(a \cap b) \subseteq V(ab)$.

Sei nun $p \in V(a \cap b)$ bel. dann ist $a \cap b \subseteq p \overset{\text{Primverm.}}{\Rightarrow} a \subseteq p$ oder $b \subseteq p$

$\Rightarrow p \in V(a) \cup V(b)$.

Sei nun $p \in V(ab)$ und $x \in a \cap b$. Dann ist $\underset{\underset{a}{\Uparrow}}{x} \cdot \underset{\underset{b}{\Uparrow}}{x} \in ab \subseteq p$. Da p Primideal

folgt $x \in p$ und damit $a \cap b \subseteq p \Rightarrow p \in V(a \cap b)$. $\square$