Aufgabe	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte				

Aufgabe 2. In Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{x} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \implies \dot{\vec{x}} = \dot{\rho}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \implies \dot{\vec{x}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Damit folgt

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho)$$

Damit folgt für die verallgemeinerten Impulse

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho} =: p_\rho \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\rho^2\dot{\varphi} := p_\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} =: p_z\end{aligned}$$

Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}H(\vec{p},\vec{q}) &= \frac{p_\rho^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2\frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + V(\rho) \\ &= \frac{2}{m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + V(\rho)\end{aligned}$$

Als Erhaltungsgrößen folgen damit sofort

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\varphi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_z = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H = 0 \implies E = \text{konst.}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Brachistochrone)**.**

$$T[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_E}\sqrt{\frac{1+[f'(x)]^2}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Die Lagrange Funktion und der verallgemeinerte Impuls sind damit gegeben als

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{2gf}} \\ p &= \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{2gf(1+f'^2)}}\end{aligned}$$

Damit folgt für die Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch f' statt p

$$\begin{aligned}H(f,f') &= \frac{f'^2}{\sqrt{2gf(1+f'^2)}} - \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{2gf}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2gf(1+f'^2)}}\end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, folgt für die Konstante $E > 0$

$$E := -H = \frac{1}{\sqrt{2gf(1+f'^2)}}.$$

Damit folgt als DGL

$$E\sqrt{2gf(1+f'^2)} = 1.$$

b) Mit $f(\varphi) = \frac{1-\cos\varphi}{4gE^2}$ und $x(\varphi) = \frac{\varphi-\sin\varphi}{4gE^2}$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Damit folgt

$$E\sqrt{2g\frac{1-\cos\varphi}{4gE^2}\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}+\frac{1+\cos\varphi}{2}} = 1.$$

Aufgabe 4 (Verständnisfragen). a) Koordinaten von denen die Lagrange Funktion nicht explizit abhängt, heißen zyklisch. Dann ist der kanonisch konjugierte Impuls zeitlich konstant. Ihr Nullpunkt kann beliebig verschoben werden, ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern:

$$q_i \to q_i + c.$$

b) Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass die Wirkung entlang der wirklichen Bahn eines Massenpunkts zwischen zwei Punkten extremal wird. Die Wirkung ist das Zeitintegral über die Lagrange Funktion:

$$\delta S[q(t)] = \delta\left[\int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,\mathrm{d}t\right] = 0.$$

c) Nein. Die Lagrange-Funktion kann um die Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(q,t)$ ergänzt werden

$$L \to L + \frac{\mathrm{d}f\,(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

denn dadurch ändert sich die Wirkung nur um einen konstanten Term, der bei der Variation verschwindet. Deshalb bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert.