

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. a) Die potentielle Energie ist gegeben als mgz , mit $z = R \cos \vartheta$ folgt also $mgR \cos \vartheta$. Die kinetische Energie hat zwei Komponenten, einmal die Rotation um ϑ , gegeben als $R^2 \dot{\vartheta}^2$ und die Rotation um die z -Achse, die abhängig ist vom Rotationsradius, also gegeben als $R^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta$.

b) Für den kanonisch konjugierten Impuls gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = MR^2 \dot{\vartheta} =: p_{\vartheta}$$

Damit folgt die Hamilton Funktion

$$H = \frac{p_{\vartheta}^2}{mR^2} - L = \frac{p_{\vartheta}^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2 \vartheta) + mgR \cos \vartheta.$$

c) Da ein Potential vorliegt, ist die Hamilton-Funktion nach VL gleich der Gesamtenergie. Sie sind wegen $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ beide zeitlich erhalten.

d) Für die kanonischen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta}} &= \frac{2p_{\vartheta}}{mR^2} - \frac{p_{\vartheta}}{mR^2} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2} = \dot{\vartheta} \\ \frac{\partial H}{\partial \vartheta} &= mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - mgR \sin \vartheta = mR \sin \vartheta (R\omega^2 \cos \vartheta - g) = -\dot{p}_{\vartheta}. \end{aligned}$$

e) Für stationäre Lösungen gilt $\dot{\vartheta} = 0$, also $p_{\vartheta} = 0$, damit folgt

$$mR \sin \vartheta (R\omega^2 \cos \vartheta - g) = 0.$$

Als stationäre Lösungen folgen damit $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \pi$, denn dann ist $\sin \vartheta = 0$. Für $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$, folgt $-mRg = 0$, dies ist also nur möglich, falls Masse oder Radius 0 sind.

Für $R \neq 0$, $m \neq 0$, $\sin \vartheta \neq 0$ und $\omega \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{\sin \vartheta}_{\neq 0} (R\omega^2 \cos \vartheta - g) &= 0 \\ \implies R\omega^2 \cos \vartheta - g &= 0 \\ \implies \vartheta &= \arccos \left(\frac{g}{R\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist $\vartheta \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2. a) Für Lagrange- und Hamiltonfunktion ist

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \\ H &= \dot{q}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p^2}{m^2} - \omega^2 q^2 \right). \end{aligned}$$

b) Die kanonischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{p}{m} = \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= m\omega^2 q = -\dot{p} \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise folgt also

$$\dot{\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Als Lösung folgt

$$\begin{aligned}\vec{y} &= e^{At} \vec{y}_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \vec{y}_0\end{aligned}$$

Mit $A^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{2k}$ und $A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{2k+1}$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t \mathbb{1}_2)^{2k}}{(2k)!} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t \mathbb{1}_2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \vec{y}_0 \\ &= \left(\cos(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega m} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t) \right) \vec{y}_0\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}q &= q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega m} \sin(\omega t) \\ p &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Aufgabe 3. a) Ansatz: $q(r, t) = R(r)T(t)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - v^2 \Delta_{(n)} q &= 0 \\ \implies R \frac{d^2 T}{dt^2} - v^2 T \Delta_{(n)} R &= 0 \\ \implies \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{konst.} = \frac{v^2}{R} \Delta_{(n)} R =: -c.\end{aligned}$$

Damit folgt für T :

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + cT = 0.$$

Für $n = 2$ gilt für R :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2}}_{=0} + \frac{c}{v^2} R &= 0 \\ \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{c}{v^2} R &= 0.\end{aligned}$$

Für $n = 3$ folgt analog

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{c}{v^2} R = 0.$$

b) Sei $c > 0$. Ansatz: $R(r) = \frac{\tilde{R}(r)}{r}$. Aus der DGL für R folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{R}}{\partial r} - r \frac{\partial \tilde{R}}{\partial r^2} \right) + \frac{c}{v^2} \frac{\tilde{R}}{r} &= 0 \\ \implies \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial r^2} + \frac{c}{v^2} \tilde{R} \right) &= 0 \\ \implies -\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial r^2} + \frac{c}{v^2} \tilde{R} &= 0 \\ \implies \tilde{R} = A \exp \left(\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right) + B \exp \left(-\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right) \\ \implies R = \frac{A \exp \left(\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right) + B \exp \left(-\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right)}{r}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$q = T \cdot R = \frac{A_0}{r} \cos(\sqrt{c}t - \delta) \left(A \exp \left(\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right) + B \exp \left(-\sqrt{\frac{c}{v^2}} r \right) \right).$$

Aufgabe 4 (Verständnisfragen). a) Die Hamilton-Funktion ist definiert als

$$H(q, p) = \dot{q}_i p_i - L.$$

und ist, falls die Kräfte Potentialkräfte sind und nur zeitunabhängige Zwangsbedingungen vorliegen, gleich der Gesamtenergie des Systems.

Die kanonischen Gleichungen sind DGL 1. Ordnung, die die Bewegung des Systems im Phasenraum beschreiben.

b) Wenn von N -Massepunkten zu einem kontinuierlichen System übergegangen wird, geht die Lagrange-Funktion in ein räumliches Integral über eine Lagrange-Dichte über.

$$L \rightarrow L(q, \dot{q}) = \int_0^l \text{Lagrange-Dichte} \, dx.$$

Die Wirkung ist das Zeitintegral über eine Lagrangefunktion.

c) Die d'Alembertsche Gleichung ist eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^N v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = 0.$$

Allgemein ist die Lösung für zwei beliebige Funktionen g und h gegeben als

$$q(x, t) = g(x + vt) + h(x - vt),$$

also eine Überlagerung zweier Wellen, wobei g rück- und h vorläufig ist.