Korrolar 0.1 (2. Mittelwertsatz)**.** Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ monoton, $g\colon I \to \mathbb{R}$ R.-integrierbar. Dann ex. $\xi \in [a,b]$ s.d.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

Beweis. o.B.d.A: f monoton fallend.

Definiere $\phi(t) := f(a)\int_a^t g(x)dx + f(b)\int_t^b g(x)dx$, $a \le t \le b$. Nach HDI $\phi(t)$ stetig.

$$\varphi(a) = f(b)\int_a^b g(x)dx \overset{f \text{ monoton fallend}}{\le} \int_a^b f(x)g(x)dx \le f(a)\int_a^b g(x)dx = \varphi(b).$$

Nach ZWS $\exists \xi \in [a,b]$ s.d. $\varphi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. □

Bemerkung 0.2. Monotonie unverzichtbar. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $I = [-1,1]$.

$$f(-1)\int_{-1}^\xi g(x)dx + f(1)\int_\xi^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 1dx = 2 \quad \forall \xi \in I$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \ne 2.$$

0.1 Integrationsformeln

Lemma 0.3 (Partielle Integration)**.** $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. $(f\cdot g)'(x) = f'\cdot g + f \cdot g' \implies$

$$\int_a^b (f'\cdot g + f\cdot g')(x)dx = \int_a^b (f\cdot g)'(x)dx \overset{\text{HDI}}{=} (f\cdot g)(x)\Big|_a^b.$$

□

Beispiel 0.4.

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos^2(x) &= \int_a^b \cos x \cdot \cos x dx\\ &= \cos x \cdot \sin x\Big|_a^b - \int_a^b (-\sin x)\sin x dx\\ &= \cos x \cdot \sin x|Big_a^b + \int_a^b (1-\cos^2(x))dx\\ \implies 2\int_a^b \cos^2(x)dx &= \cos x\cdot \sin x\Big|_a^b + \int_a^b dx.\end{aligned}$$

Lemma 0.5. Seien $[a,b], [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann $F\circ\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$(F\circ\varphi)' = (F'(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)dt = (F\circ\varphi)(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

□

Bemerkung 0.6. Formal: $x = \varphi(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \implies dx = \varphi'(t)dt$$
$$\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Beispiel 0.7.

$$\int_0^2 t\cdot\cos(\underbrace{t^2+t}_{x})dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(\underbrace{t^2+t}_{\varphi(t)})\cdot 2tdt = \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)=1}^{\varphi(2)=5}\cos x dx.$$

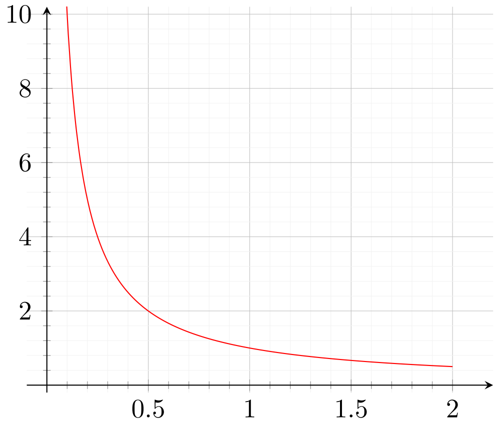
0.2 Uneigentliche Integrale

Satz 0.8 (Uneigentliches R.-Integral Typ 1)**.** Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ auf $(a,b]$ R.-integrierbar, d.h. f R.-integrierbar auf $\forall [a',b] \subset (a,b]$, aber nicht auf $[a,b]$.

Falls für alle Folgen $a_n \in (a,b]$ ex.

$$\lim_{a_n \searrow a}\int_{a_n}^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

Dann gilt: Dieser Limes ist von der Wahl der Folge a_n unabhängig und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$.



Beweis. Sei $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit

$$\lim_{a_n\searrow a}\int_{a'}^b f(x)dx = A'.$$

Konstruiere Folge $\{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots\} = (a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzungen

$$\exists \lim_{a''_n\searrow a}\int_{a''}^b f(x)dx = A''.$$

Alle Teilfolgen konvergenter Folgen, konvergieren gegen denselben Limes wie die Gesamtfolge $\implies$ $A'' = A'$. □

Lemma 0.9. Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ auf $(a,b]$ aber nicht auf $[a,b]$ integrierbar.

Falls das uneigentliche Integral von $|f|$ auf $[a,b]$ ex., dann ex. das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$ und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0, \epsilon < b-a$. Betrachte

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx = \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}dx - \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)|-f(x)}{2}dx.$$

Integrale sind gleichmäßig beschränkt.

$$\frac{|f(x)|+f(x)}{2} > 0 \quad \forall x \text{ und } \frac{|f(x)|-f(x)}{2} > 0 \quad \forall x.$$

$\implies \int_{a+\epsilon}^b \ldots dx$ monoton wachsend für $\epsilon \to 0$ und

$$\left|\int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}dx\right| + \left|\int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)|-f(x)}{dx}\right| \leq \frac{4}{2}\int_{a+\epsilon}^b |f(x)|dx \leq 2\int_a^b |f(x)|dx.$$

$\implies$ Für $\epsilon \to 0$:

$$\exists \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

□

Bemerkung 0.10.

1. Umkehrung der Aussage (d.h. f uneigentlich integrierbar $\implies$ $|f|$ uneigentlich integrierbar) ist i.A. nicht richtig.
   „einfache" Konvergenz, d.h. $\exists \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.
   „absolute" Konvergenz / absolut uneigentlich integrierbar, d.h. $\exists \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b |f(x)|dx$.
2. Sei $\int_a^b f(x)dx$ bei b uneigentlich und bei a nicht uneigentlich, dann definiert man das uneigentliche Integral
   $$\int_a^b f(x)dx := \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt \quad \text{oder}$$
   $$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$
   falls der Limes existiert!
3. Sei $\int_a^b f(x)dx$ bei a und b uneigentlich, dann
   $$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0}\int_c^{b-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^c f(x)dx.$$
   mit $c \in (a,b)$, falls beide Grenzwerte existieren, ist der Wert unabhängig von der Wahl von $c \in (a,b)$.
4. Uneigentliches Integral existiert $\iff$ uneigentliches Integral konvergiert.

Lemma 0.11 (wie bei Reihen)**.** Absolute Konvergenz $\implies$ Einfache Konvergenz

Beispiel 0.12.

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \infty.$$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}}\bigg|_{a+\epsilon}^b = \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\mu-1}}\right).$$

$\implies$ Integral ex. für $0 < \mu < 1$, ex. nicht für $\mu \geq 1$.

Satz 0.13 (Uneigentliche R.-Integrale Typ 2)**.** Sei $f\colon [a,\infty] \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion, d.h. f ist auf $[a,b'] \subset [a,\infty)$ integrierbar $\forall b'$.

Falls für alle Folgen $b_n \in [a,+\infty)$ der Limes

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)dx =: \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

existiert, dann ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt uneigentliches Integral von f über $[a,\infty)$.

Lemma 0.14. Sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und es existiere $\int_a^\infty |f(x)|dx$. Dann ex. $\int_a^\infty f(x)dx$ und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Ende. $\square$