

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Sei μ σ -endlich. Beh.: Dann ist μ regulär.

Beweis. Da μ σ -endlich ex. $A_k \in \mathcal{B}(X)$, s.d. $\mu(A_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. O.E. seien $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, denn andernfalls können die doppelten Schnitte entfernt werden, ohne die Eigenschaften zu ändern.

Damit definiere

$$\mu_k(A) := \mu(A \cap A_k) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

μ_k wohldefiniert, da $A \cap A_k \in \mathcal{B}(X)$. Da $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, folgt für $A \in \mathcal{B}(X)$: $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap A_k)$.

Damit folgt wegen der σ -Additivität von μ :

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap A_k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A \cap A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(A).$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ist μ_k ein endliches Maß, denn

- (i) $\mathcal{B}(X)$ ist σ -Algebra.
- (ii) $\mu_k(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap A_k) = \mu(\emptyset) = 0$, da μ Maß.
- (iii) Sei $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $\mu_k(A) = \mu(A \cap A_k) \geq 0$, da μ Maß.
- (iv) Seien $A_i \in \mathcal{B}(X)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist wegen der σ -Additivität von μ :

$$\mu_k\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap A_k\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap A_k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_k(A_i).$$

- (v) Sei $A \in \mathcal{B}(X)$: $A \cap A_k \subseteq A_k$, also folgt wegen Monotonie von μ , dass

$$\mu_k(A) = \mu(A \cap A_k) \leq \mu(A_k) < \infty.$$

Sei nun $A \in \mathcal{B}(X)$ und $\epsilon > 0$.

Z.z.: $\exists A \subseteq U$ mit U offen und $\exists K \subseteq A$ mit K abgeschlossen, s.d. $K \subseteq A \subseteq U$ mit $\mu(U \setminus K) < \epsilon$.

Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Dann ist μ_k endliches Maß, also nach Vorlesung bereits regulär. Es ex. also U_k, K_k mit $K_k \subseteq A \subseteq U_k$, U_k offen, K_k abgeschlossen und $\mu_k(U_k \setminus K_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Dann definiere $V := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ und $S := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$. Da $\forall k \in \mathbb{N}$: $A \subseteq U_k$ und $K_k \subseteq A$, folgt $S \subseteq A \subseteq V$. Weiter ist für $k \in \mathbb{N}$, da μ_k endlich und monoton:

$$\mu_k(V \setminus S) = \underbrace{\mu_k(V)}_{\leq \mu_k(U_k)} - \underbrace{\mu_k(S)}_{\geq \mu_k(K_k)} \leq \mu_k(U_k) - \mu_k(K_k) = \mu_k(U_k \setminus K_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Damit folgt mit geometrischer Reihe im letzten Schritt

$$\mu(V \setminus S) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(V \setminus S) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{4} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{4} \frac{1}{2^n} = \frac{\epsilon}{2} \quad (*).$$

Im Allgemeinen ist V jedoch nicht offen und S nicht abgeschlossen, aber $V^n := \bigcap_{k=1}^n U_k$ offen und $S^n := \bigcup_{k=1}^n K_k$ abgeschlossen. Dann betrachte

$$D_n := \underbrace{V^n}_{\searrow V} \setminus \underbrace{S^n}_{\nearrow S} \searrow V \setminus S.$$

Da μ Maß, folgt also $\mu(D_n) \searrow \mu(V \setminus S)$. Das heißt es ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq n_0$ gilt $\mu(D_n) - \mu(V \setminus S) < \frac{\epsilon}{2}$ (**). Wähle nun $U = V^{n_0}$ und $K = S^{n_0}$. Dann ist U offen, K abgeschlossen und $K \subseteq A \subseteq U$ mit

$$\mu(U \setminus K) = \mu(D_{n_0}) \stackrel{(**)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \mu(V \setminus S) \stackrel{(*)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist μ regulär. □

Aufgabe 2. (a) Beh.: $\mathcal{H}^s = 0$ für $s > 1$.

Beweis. Sei $s > 1$ und $\delta > 0$. Dann ex. nach Archimedischem Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Definiere

$$A_k := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$$

für $1 \leq k \leq n$ und $A_k = \emptyset$ für $k > n$. Dann ist $[0, 1] \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und $\text{diam}(A_k) = \frac{1}{n} < \delta$ für $1 \leq k \leq n$ und $\text{diam}(A_k) = 0 < \delta$ für $k > n$. Damit folgt

$$\mathcal{H}_\delta^s([0, 1]) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_k)^s = n \left(\frac{1}{n} \right)^s = \left(\frac{1}{n} \right)^{s-1} < \delta^{s-1}.$$

Mit $s > 1$ folgt $s-1 > 0$, also $\delta^{s-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Damit folgt $0 \leq \mathcal{H}^s([0, 1]) \leq 0$, also $\mathcal{H}^s([0, 1]) = 0$. Definiere nun

$$I_n := n \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \nearrow \mathbb{R}.$$

Dann folgt für $n \in \mathbb{N}$ wegen der Translationsinvarianz und Skalierung von $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(I_n) = \mathcal{H}^s \left(n \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) = n^s \mathcal{H}^s \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) = n^s \underbrace{\mathcal{H}^s([0, 1])}_{=0} = 0.$$

Da $I_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}^s: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ Borelmaß und $I_n \nearrow \mathbb{R}$ folgt $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}) = 0$. Also für $A \subseteq \mathbb{R}$ folgt mit der Monotonie von $\mathcal{H}^s$:

$$0 \leq \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(\mathbb{R}) = 0.$$

Also $\mathcal{H}^s(A) = 0$. □

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Beh.: $\exists s^* \geq 0$ mit $\mathcal{H}^{s^*}(A) < \infty \implies H^s(A) = 0 \forall s > s^*$.

Beweis. Sei $s^* \geq 0$ mit $H^{s^*}(A) < \infty$ und $s > s^*$. Sei weiter $\delta > 0$. Dann ex. $A_i \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ und $\text{diam}(A_i) \leq \delta$, s.d. $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_i)^{s^*} =: C < \infty$. Dann folgt wegen $s > s^*$ auch $s - s^* > 0$, also folgt

$$0 \leq \mathcal{H}_\delta^s \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_i)^s \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_i)^{s^*} \delta^{s-s^*} = \delta^{s-s^*} C \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Damit ist $0 \leq \mathcal{H}^s(A) \leq 0$, also $\mathcal{H}^s(A) = 0$. □

(c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Beh.: $\exists s^* > 0$ mit $\mathcal{H}^{s^*}(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty \forall s < s^*$.

Beweis. Sei $s^* > 0$ mit $\mathcal{H}^{s^*}(A) > 0$. Ang.: $\exists s < s^*$ mit $H^s(A) < \infty$. Dann folgt mit (b) direkt, dass $\forall s > s^*: \mathcal{H}^s(A) = 0$, also $\mathcal{H}^{s^*}(A) = 0$ ∇ . □

(d) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ höchstens abzählbar. Beh.: $\dim A = 0$.

Beweis. Falls A endlich: Dann seien die Elemente von A $a_1, \dots, a_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$A_i := \begin{cases} \{a_i\} & i \leq n \\ \emptyset & i > n \end{cases}.$$

Falls A abzählbar unendlich, dann sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Abzählung von A und

$$A_i := \{a_i\}.$$

Dann gilt in beiden Fällen $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ mit $\text{diam}(A_i) = 0 \forall i \in \mathbb{N}$. Damit ist $\forall \delta > 0$ und $s > 0$:

$$0 \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\text{diam}(A_i)^s}_{=0} \stackrel{s \geq 0}{=} 0.$$

Damit folgt $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für $s > 0$. Also folgt

$$0 \leq \dim A = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} \leq s.$$

Für $s \rightarrow 0$ folgt $\dim A = 0$. □

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \neq \emptyset$ und offen. Beh.: $\dim \Omega = 1$.

Beweis. Es ist $0 \leq \dim \Omega \leq 1$ wegen (a). Das heißt es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{H}^s(\Omega) = \infty$ für $s < 1$.

Beh.: $\mathcal{H}^s((0, 1)) = \infty$ für $s < 1$.

Sei dazu $0 \leq s < 1$ und $\delta > 0$ und $B_j \subseteq \mathbb{R}$ mit $\text{diam}(B_j) \leq \delta \forall j \in \mathbb{N}$ und $(0, 1) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Es ist $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j) \geq \text{diam}((0, 1)) = 1$. Damit folgt

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j) \text{diam}(B_j)^{s-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\text{diam}(B_j)}{\text{diam}(B_j)^{1-s}} \stackrel{1-s>0}{\geq} \frac{\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)}{\delta^{1-s}} \geq \frac{1}{\delta^{1-s}}.$$

Damit folgt $H_\delta^s((0, 1)) \geq \frac{1}{\delta^{1-s}}$. Mit $\delta \rightarrow 0$ folgt $H^s((0, 1)) = \infty$.

$\Omega \neq \emptyset$ und Ω offen. Sei nun $x \in \Omega$, dann ex. $\epsilon > 0$, s.d. $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \Omega$. Damit folgt mit Monotonie, Translationsinvarianz und Skalierung von $\mathcal{H}^s$:

$$\mathcal{H}^s(\Omega) \geq \mathcal{H}^s((x - \epsilon, x + \epsilon)) = \mathcal{H}^s((0, 2\epsilon)) = \underbrace{(2\epsilon)^s}_{>0} \underbrace{\mathcal{H}^s((0, 1))}_{=\infty} = \infty.$$

Damit folgt $s < \dim \Omega \leq 1$ für $0 \leq s < 1$. Für $s \rightarrow 1$ folgt $\dim \Omega = 1$. □

Aufgabe 3. (a) Beh.: $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|.$$

Beweis. Sei $x \in [0, 1]$. Fallunterscheidung:

(i) Falls $x \in [0, \frac{1}{3}]$:

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| &= \left| \frac{1}{2} f_k(3x) - \frac{1}{2} f_{k-1}(3x) \right| \\ &= \frac{1}{2} |f_k(3x) - f_{k-1}(3x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|. \end{aligned}$$

(ii) Falls $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$:

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 0 \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|.$$

(iii) Falls $x \in (\frac{2}{3}, 1]$:

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| &= \left| \frac{1}{2} (1 + f_k(3x - 2)) - \frac{1}{2} (1 + f_{k-1}(3x - 2)) \right| \\ &= \frac{1}{2} |f_k(3x - 2) - f_{k-1}(3x - 2)| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

(b) Beh.: f_k konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige und monoton wachsende Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Beweis. Sei im Folgenden $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm auf $[0, 1]$.

Zunächst zu zeigen, dass f_k Cauchy-Folge. Sei dazu $\epsilon > 0$ und setze $N_0 := \log_2(\frac{1}{\epsilon}) + 2$. Dann gilt $\forall m, n \geq N_0$ zunächst

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2^n} \quad (*).$$

Sei nun o.E. $m \geq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \|f_m - f_n\|_\infty &= \|f_m - f_{m-1} + f_{m-1} - \dots + f_{n+1} - f_n\|_\infty \\
 &\leq \|f_m - f_{m-1}\| + \dots + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \dots + \frac{1}{2^n} \\
 &= \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j} \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
 &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}} - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{m-2}} \\
 &\leq \frac{1}{2^{N_0-2}} \\
 &< \frac{1}{2^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}} \\
 &= \epsilon.
 \end{aligned}$$

□

Also ist f_k Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Z.z.: $\forall k \in \mathbb{N}_0$: f_k stetig (i), monoton wachsend (iii) mit $f_k(0) = 0$ und $f_k(1) = 1$ (ii).

Beweis per Induktion über k . $k = 0$: $f_0(x) = x$ stetig, monoton wachsend und $f_0(0) = 0$ und $f_0(1) = 1$.

Nun $k \rightarrow k+1$:

- (i) Sei $x \in [0, 1]$. Für $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $x \in (\frac{2}{3}, 1]$ klar, da f_k stetig.

Für $x = \frac{1}{3}$ bzw. $x = \frac{2}{3}$ sind nur die links bzw. rechtsseitigen Grenzwerte zu betrachten. Sei also $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$ mit $0 \leq x_n < \frac{1}{3}$ beliebig. Dann ex. ein $N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq N_0$: $3x_n \in (\frac{2}{3}, 1]$. Dann gilt $\forall n \geq N_0$:

$$f_{k+1}(x_n) = \frac{1}{2} f_k(\underbrace{3x_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f_k \text{ stetig}} \frac{1}{2} f_k(1) \stackrel{\text{IV (ii)}}{=} \frac{1}{2} = f_{k+1}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Für $x = \frac{2}{3}$ betrachte also $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$ mit $\frac{2}{3} < x_n \leq 1$. Dann ex. $N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $3x_n - 2 \in [0, \frac{1}{3}]$ $\forall n \geq N_0$. Dann ist

$$f_{k+1}(x_n) = \frac{1}{2} (1 + f_k(\underbrace{3x_n - 2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f_k \text{ stetig}} \frac{1}{2} (1 + f_k(0)) \stackrel{\text{IV (ii)}}{=} \frac{1}{2} = f_{k+1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

Damit ist f_{k+1} stetig.

- (ii) Es ist $f_{k+1}(0) = \frac{1}{2} f_k(0) \stackrel{\text{IV (ii)}}{=} 0$ und $f_{k+1}(1) = \frac{1}{2} (1 + f_k(3 - 2)) = \frac{1}{2} (1 + f_k(1)) \stackrel{\text{IV (ii)}}{=} 1$.
- (iii) Sei $x \in [0, 1]$. Dann ist $0 \leq f_k(x) \leq 1$, da f_k monoton wachsend und $f_k(0) = 0$ und $f_k(1) = 1$ nach IV (ii) und (iii). Damit folgt falls $x \in [0, \frac{1}{3}]$: $f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} f_k(x) \leq \frac{1}{2}$. Falls $x \in (\frac{2}{3}, 1]$: $f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} (1 + f_k(3x - 2)) \geq \frac{1}{2}$.

Seien nun $x, y \in [0, 1]$ mit $x \leq y$.

Falls $x \in [0, \frac{1}{3}]$: Falls $y \in (\frac{1}{3}, 1]$, folgt $f_{k+1}(y) \geq \frac{1}{2} \geq f_{k+1}(x)$, sonst:

$$f_{k+1}(x) = f_k(3x) \stackrel{\text{IV (iii)}}{\leq} f_k(3y) = f_{k+1}(y).$$

Falls $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $y \in (\frac{2}{3}, 1]$: $f_{k+1}(y) \geq \frac{1}{2} = f_{k+1}(x)$, sonst

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} = f_{k+1}(y).$$

Falls $x \in (\frac{2}{3}, 1]$, dann ist auch $y \in (\frac{2}{3}, 1]$ und

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}(1 + f_k(3x - 2)) \stackrel{\text{IV (iii)}}{\leq} \frac{1}{2}(1 + f_k(3y - 2)) = f_{k+1}(y).$$

Damit ist f_k stetig und monoton wachsend $\forall k \in \mathbb{N}$, also $f_k \in \mathcal{C}([0, 1])$. Da $\mathcal{C}([0, 1])$ vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz $\exists f \in \mathcal{C}([0, 1])$ stetig mit $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{glm.}} f$. Da f_k monoton wachsend und $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{glm.}} f$ ist auch f monoton wachsend.

(c) Beh.: $f \circ g = \text{id}$.

Beweis. Sei $y \in [0, 1]$. Dann definiere

$$g(y) = a := \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}.$$

Ang.: $f(a) \neq y$. Dann $\exists \epsilon > 0$, s.d. $|f(a) - y| > \epsilon$. Da f stetig, ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall x \in [0, 1]$ mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ (*). Nun ist $a = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}$. Das heißt es ex. ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = y$, s.d. $x < a + \delta$. Da außerdem $x \geq a$ folgt $|x - a| < \delta$. Damit folgt mit (*), dass $|f(x) - f(a)| = |f(a) - y| < \epsilon$ ∇ .

Es folgt also $y = f(a) = f(g(y))$. Also $f \circ g = \text{id}$. $\square$

Beh.: g injektiv.

Beweis. Ang.: g nicht injektiv. Dann ex. $x_1, x_2 \in [0, 1]$ mit $x_1 \neq x_2$ und $g(x_1) = g(x_2)$. Dann ist

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \stackrel{f \circ g = \text{id}}{\implies} x_1 = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = x_2 \quad \nabla.$$

$\square$

(d) Beh.: g Borel-messbar.

Beweis. Z.z.: g monoton. Seien $x, y \in [0, 1]$ mit $x \leq y$. Ang. $g(x) > g(y)$. Dann ist

$$x = f(g(x)) \stackrel{f \text{ monoton wachsend}}{>} f(g(y)) = y \quad \nabla.$$

Also folgt $g(x) \leq g(y)$. Also g monoton wachsend. Da $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, folgt g Borel-messbar. $\square$

(e) Sei $V \subseteq [0, 1]$ nicht Lebesgue-messbar. Beh.: $g(V)$ ist Lebesgue-messbar.

Beweis. Es ist nach (d) $g(V) \subseteq g([0, 1]) \subseteq \mathcal{C}$. Also ist $g(V)$ λ -Nullmenge, da $\lambda(\mathcal{C}) = 0$, also $\lambda(g(V)) = 0$, also insbesondere $g(V)$ Lebesgue-messbar. $\square$

Aufgabe 4. Beh.: f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.

Beweis. „ $\implies$ ”: trivial, denn f messbar $\implies f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$ und da $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, folgt $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.

„ $\impliedby$ ”: Sei also $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. Also $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{E}$.

$$\mathcal{K} := \{A \in \mathcal{F} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

Z.z.: $\mathcal{K}$ σ -Algebra.

- (i) $Y \in \mathcal{K}$, denn $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra.
- (ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ und damit $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra.
- (iii) Seien $A_i \in \mathcal{K}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\forall i \in \mathbb{N}: f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$. Damit folgt, da $\mathcal{E}$ σ -Algebra:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. Es ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{K}$ σ -Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, damit folgt $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$, also insgesamt $\mathcal{K} = \mathcal{F}$. Also folgt $\forall A \in \mathcal{F}: f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, also $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. $\square$