**Aufgabe 1.**

Sei $G = (G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Auf der Potenzmenge $P(G)$ betrachten wir die Abbildung

$$(A, B) \to A * B = \{a \cdot b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Verknüpfung $*$ ist assoziativ:

*Beweis.*

$$\begin{aligned}(A * B) * C &= \{a \cdot b \mid (a, b) \in A \times B\} * C \\ &= \{(a \cdot b) \cdot c \mid ((a, b), c) \in (A \times B) \times C\} \\ &= \{a \cdot (b \cdot c) \mid (a, (b, c)) \in A \times (B \times C)\} \\ &= A * \{b \cdot c \mid (b, c) \in B \times C\} \\ &= A * (B * C).\end{aligned}$$

□

Existenz (links- und rechts-) neutrales Element $E$.

*Beweis.* Sei $E := \{e\}$ mit $e \in G$ neutrales Element der Gruppe $G$. Dann sei $A \in P(G)$ beliebig:

$$\begin{aligned}E * A &= \{e \cdot a | (e, a) \in E \times A\} \\ &= \{a | (e, a) \in \{e\} \times A\} \\ &= A.\end{aligned}$$

Da $e$ neutrales Element von $G$ auch rechtsneutral, folgt analog, dass $E$ auch rechtsneutral ist. □

Eindeutigkeit

*Beweis.* Seien $E$ und $\overline{E}$ neutrale Elemente, so folgt:

$$\overline{E} = \overline{E} * E = E.$$

□

Wann gibt es inverse Elemente?

Zu ein-elementigen Mengen $A := \{a\} \in P(G), a \in G$ existieren inverse Elemente $A^{-1} := \{a^{-1}\} \in P(G), a^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned}A * A^{-1} &= \{a * a^{-1} \mid (a, a^{-1}) \in \{(a, a^{-1})\}\} \\ &= \{e\} \\ &= E.\end{aligned}$$

Für leere Mengen oder Mengen mit mehr als einem Element existieren keine inversen Elemente.

*Beweis.* Leere Mengen mit $*$ verknüpft sind immer leer und ergeben, damit niemals $E$.

Falls $\#A > 1$: Angenommen $\overline{A}$ erfülle die Eigenschaft, so folgt:

$$\begin{aligned}A * \overline{A} &= \{a \cdot \overline{a} \mid (a, \overline{a}) \in A \times \overline{A}\} \\ &= \{e = a \cdot \overline{a} \mid (a, \overline{a}) \in A \times \overline{A}\}.\end{aligned}$$

Das heißt es existieren mehrere inverse Elemente zu dem selben $a \in G$, was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der inversen Elemente ist. □

Es existiert keine Menge $G$, sodass die $P(G)$ nur aus ein-elementigen Mengen besteht, da in jeder $P(G)$ die leere Menge liegt, die kein Inverses hat.

**Aufgabe 2.** Es seien $A$, $B$ und $C$ Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen zwischen ihnen.

**a)**

*Beweis.* Zu zeigen: $g \circ f$ injektiv $\implies$ $f$ injektiv

Angenommen: $f$ nicht injektiv. Dann existieren $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$, s.d. $f(a_1) = f(a_2)$.

$\implies g(a_1) = g(a_2)$. Widerspruch zu $g \circ f$ injektiv. □

**b)**

*Beweis.* Zu zeigen: $g \circ f$ surjektiv $\implies$ $g$ surjektiv

Angenommen: $g$ nicht surjektiv. Dann existiert ein $c \in C$ mit $g^{-1}(c) = \emptyset$. Damit $(g \circ f)^{-1}(c) = \emptyset$. Widerspruch zu $g \circ f$ surjektiv. □

**c)**

*Beweis.* Zu zeigen: Sind $f$ und $g$ bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv

Sei $c \in C$ beliebig, so gilt wegen $g$ bijektiv: $g^{-1}(\{c\}) = \{b\}, b \in B$. Wegen $f$ bijektiv gilt, dann dass $f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = \{a\}, a \in A$. Damit ist $f \circ g$ bijektiv.

Zu zeigen: Es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$ muss die Identitätsabbildung $id$ ergeben, damit $(g \circ f)^{-1}$ Umkehrabbildung von $(g \circ f)^{-1}$ ergibt.

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ id \circ f^{-1}) = id.$$

□

**Aufgabe 3.**

**a)** $F_n$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Nicht injektiv: $0 \in \mathbb{N}_0$ und $1 \in \mathbb{N}_0$ bilden beide auf $a$ ab.

Nicht surjektiv: Für $a = 0$ sind alle $f(n) = 0$ und damit ist $f^{-1}(1) = \emptyset$.

**b)** $f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^n \cdot a^2 \; \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis durch vollständige Induktion.* Induktionsanfang: Für $n = 1$ und für $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(1)^2 &= a^2 = a \cdot 2a - a^2 = f(0)f(2) + (-1)^1 \cdot a^2 \\ f(2)^2 &= 4a^2 = a \cdot 3a + a^2 = f(1)f(3) + (-1)^2 \cdot a^2 \end{aligned}$$

.

Induktionsvorraussetzung: Es existiere ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(n)^2 = f(n-1)f(n+1) + (-1)^n \cdot a^2.$$

Induktionsschritt $n \to n + 2$:

Zu zeigen:

$$f(n+2)^2 = f(n+1)f(n+3) + (-1)^{n+2} \cdot a^2.$$

$$
\begin{aligned}
f(n+2)^2 &= (f(n+1)+f(n))^2 \\
&= f(n+1)^2 + 2f(n+1)f(n) + f(n)^2 \\
&= f(n+1)^2 + 2f(n+1)f(n) + f(n-1)f(n+1) + (-1)^n \cdot a^2 \\
&= f(n+1)\,[f(n+1) + 2f(n) + f(n-1)] + (-1)^{n+2} \cdot a^2 \\
&= f(n+1)f(n+3) + (-1)^{n+2} \cdot a^2.
\end{aligned}
$$

Von den zwei Induktionsanfängen ausgehend, ergibt sich die Behauptung für alle $n \in N$. □

**Aufgabe 4.** Sei $f : X \to Y$ Abbildung. Wir definieren die Relation

$$R = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

**a)** $R$ ist Äquivalenzrelation auf $X$.

1. Reflexivität: Sei $a \in X$. Dann ist $a \sim a$, da $f(a) = f(a)$.
2. Symmetrie: Seien $a, b \in X$ und $a \sim b$.
   $\implies f(a) = f(b) \implies f(b) = f(a) \implies b \sim a$
3. Transitivität: Seien $a, b, c \in X$ und $a \sim b$ und $b \sim c$.
   $\implies f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c) \implies f(a) = f(c) \implies a \sim c$

**b)**

Die Abbildung $\overline{f} : X/R \to im(f)$ wird definiert als

$$\overline{f} := A \mapsto f(a), a \in A.$$

Zu zeigen: $\overline{f}$ ist bijektiv.

Injektivität: Seien $A, B \in X/R$. Entweder $A = B$, daraus folgt, dass $\overline{f}(A) = \overline{f}(B)$. oder $A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$, daraus folgt, dass $\overline{f}(A) \neq \overline{f}(B)$.

Surjektivität: Sei $y$ in $im(f)$, so existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dieses x liegt in einer Äquivalenzklasse aus $X/R$. Damit $\overline{f}^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Aus Injektivität und Surjektivität folgt, dass $\overline{f}$ bijektiv ist.

Eindeutigkeit: Die Abbildung $\overline{f}$ ist eindeutig bestimmt, durch den Zusammenhang

$$\overline{f} \circ p = f.$$

Da $p$ einem $x$ immer eindeutig genau eine Äquivalenzklasse zuordnet, nämlich, die jenige Teilmenge $A \in X/R$, deren Elemente alle auf das selbe $f(x)$ abbilden, muss $\overline{f}$ stets genau der Äquivalenzklasse $[x]$ ihr gemeinsames Bild $f(x)$ zuordnen, damit die Gleichheit $\overline{f} \circ p = f$ erfüllt ist.