Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Seien $\mathcal{A}_i, i \in I$ σ-Algebren über Ω. Beh.: $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ σ-Algebra über Ω.

Beweis. (i) $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$, denn $\forall i \in I\colon \Omega \in \mathcal{A}_i$, da $\mathcal{A}_i$ σ-Algebra.

(ii) Sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Dann ist für $i \in I$: $A \in \mathcal{A}_i$. Da $\mathcal{A}_i$ σ-Algebra, ist $A^c \in \mathcal{A}_i$. Damit folgt $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(iii) Sei $A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Da für alle $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ σ-Algebra, ist $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_i$. Also auch $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

□

(b) Beh.: Die Aussage ist falsch.

Beweis. Es sei $\Omega \coloneqq \{0,1,2\}$, $\mathcal{A}_1 \coloneqq \sigma(\{0\}) = \{\Omega, \emptyset, \{0\}, \{1,2\}\}$ und $\mathcal{A}_2 \coloneqq \sigma(\{2\}) = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{0,1\}\}$. Dann sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ nach VL σ-Algebren über Ω, aber $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{0\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1\}\}$ nicht, da $\{0\} \cup \{2\} = \{0,2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. □

(c) Sei $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω und $f\colon \mathcal{X} \to \Omega$ Abbildung. Beh.: $f^{-1}(\mathcal{A}) \coloneqq \{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ ist σ-Algebra.

Beweis. (i) $\mathcal{X} \in f^{-1}(\mathcal{A})$, denn $f^{-1}(\Omega) = \mathcal{X}$.

(ii) Sei $B \in f^{-1}(\mathcal{A})$. Dann ex. ein $A \in \mathcal{A}$, s.d. $f^{-1}(A) = B$. Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra ist $A^c \in \mathcal{A}$. Damit folgt

$$B^c = f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}).$$

(iii) Seien $B_i \in f^{-1}(\mathcal{A})$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Dann ex. $\forall i \in \mathbb{N}$ ein $A_i \in \mathcal{A}$, s.d. $f^{-1}(A_i) = B_i$. Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. Damit folgt

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \in f^{-1}(\mathcal{A}).$$

□

(d) Sei $T \subseteq \Omega$ mit $T \neq \emptyset$ und sei $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω. Beh.: $A|_T \coloneqq \{A \cap T\colon A \in \mathcal{A}\}$ σ-Algebra.

Beweis. Betrachte die kanonische Inklusion $\iota\colon T \hookrightarrow \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iota^{-1}(\mathcal{A}) &= \{\iota^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{\{x \in T\colon \iota(x) \in A\}\colon A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{\{x \in T\colon x \in A\}\colon A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{A \cap T\colon A \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit (c). □

Aufgabe 2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beh.: $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Beweis. Sei $A \subseteq B$. Dann ist

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \mathbin{\dot\cup} B \setminus A) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A).$$

□

(b) Beh.: $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$.

Beweis. Es ist zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A \setminus B \,\dot\cup\, B \setminus A) \\
&\overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

Sei o.E. $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$ (sonst analog durch Hinzufügen von $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)$). Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| + \underbrace{2\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0} \\
&\geq |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|.
\end{aligned}$$

□

(c) Beh.: $\mathbb{P}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

Beweis. Betrachte $B_n \coloneqq A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$. Dann ist $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq A_n$ also mit (a) $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$. Damit folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \overset{\sigma\text{Additivität}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

(d) Beh.: $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Beweis. Sei $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Betrachte $B_n \coloneqq A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$. Da A_n monoton wachsend, ist für $n \geq 2$: $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) &= \mathbb{P}\left(\dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \\
&\overset{\sigma\text{Additivität}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1})) \\
&\overset{A_n \subseteq A_{n+1}}{=} \mathbb{P}(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) \\
&\overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \mathbb{P}(B_1) - \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
&\overset{B_1 = A_1}{=} \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Der Induktionsanfang ist offensichtlich wahr, $\mathbb{P}(A_1) = (-1)^0 \cdot \mathbb{P}(A_1)$. Gelte die Behauptung also für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) =& \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \cap A_{n+1}\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A_{n+1})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}((A_{k_1} \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_{k_j} \cap A_{n+1}))\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j} \cap A_{n+1})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \forall i:\ k_i \neq n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& + \sum_{j=2}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \exists i:\ k_i = n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \forall i:\ k_i \neq n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) \\
& + \sum_{j=1}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \exists i:\ k_i = n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right)
\end{aligned}$$

Für $j = n+1$ gilt $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n+1\}$. Daher können wir die beiden Summen im letzten Schritt einfach zusammenfassen und erhalten

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right),$$

was zu zeigen war.

(b) Beh.: Die Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ ist $1 - \frac{1}{e}$.

Beweis. Setze $\Omega := \{(g_1, \dots, g_n) \mid g_1, \dots, g_n \in \{1, \dots, n\}, g_i \neq g_j \text{ für } i \neq j\}$. Dabei bezeichnet ein Ergebnis $(g_1, \dots, g_n) \in \Omega$: „Roter Marsmensch i tanzt mit grünem Marsmensch g_i für $i \in \{1, \dots, n\}$". Die ursprüngliche Paarung sei dabei $(1, 2, \dots, n) \in \Omega$. Es folgt direkt $\#\Omega = n!$. Definiere weiter

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\colon 2^{\Omega} &\to [0, 1] \\
A &\mapsto \frac{\#A}{n!}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{n!}{n!} = 1$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ist $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Damit ist für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} A_i &= \text{„Roter Marmensch } i \text{ tanzt mit der ursprünglichen Begleitung zusammen”} \\ &= \{(g_1, \ldots, g_n) \in \Omega \mid g_i = i\}. \end{aligned}$$

Sei A_n = „Mindestens ein ursprüngliches von insgesamt n Paaren tanzt gemeinsam ”. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\} \subseteq \{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_k \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{n!} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-j)!}{n!} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_\infty) &= \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \\ &= -\left(\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j!}\right) \\ &= -\left(\sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} - 1\right) \\ &= -\left(\frac{1}{e} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $\mathbb{F}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Beh.: $\mathbb{F}$ monoton wachsend.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \le x_2$. Dann ist $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$. Mit 2(a) folgt damit $\mathbb{F}(x_1) = \mathbb{P}((-\infty, x_1]) \le \mathbb{P}((-\infty, x_2]) = \mathbb{F}(x_2)$. □

(b) Beh.: $\lim_{x\to\infty} \mathbb{F}(x) = \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Dann ist $A_n := \bigcup_{j=1}^n (-\infty, x_n]$ monoton wachsende Folge mit $A_n \uparrow \mathbb{R}$. Damit folgt da $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \overset{2(d)}{=} \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

□

Beh.: $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{F}(x) = 0$.

Beweis. Analog, betrachte nun $A_n := \bigcap_{j=1}^n (-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$. □

(c) Beh.: $\mathbb{F}$ rechtsseitig stetig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \downarrow x$. Dann betrachte $A_n := (-\infty, x_n]$. Es gilt sofort $A_n \downarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(-\infty, x_k] = (-\infty, x]$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \overset{2(\mathrm{d})}{=} \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{F}(x).$$

□

(d) Beh.: $\mathbb{F}$ hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann betrachte

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow a} \mathbb{F}(x) - \lim_{x\nearrow a} \mathbb{F}(x) &\overset{\text{(c) und Hinweis}}{=} \mathbb{P}((-\infty, a]) - \mathbb{P}((-\infty, a)) \\
&= \mathbb{P}((-\infty, a]) - \mathbb{P}((-\infty, a] \cap (-\infty, a)) \\
&= \mathbb{P}((-\infty, a] \setminus (-\infty, a)) \\
&= \mathbb{P}(\{a\}).
\end{aligned}$$

Die Sprungstellen von F sind also gerade die Atome von $\mathbb{P}$. Da $\mathbb{P}$ nach VL nur höchstens abzählbar viele Atome auf $\mathbb{R}$ hat, folgt die Behauptung. □