Aufgabe	A36	A37	A38	A39	A40	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 36. Sei $X \in \mathscr{A}^n$ die Flughöhe von n Barock-Raketen und $Y \in \mathscr{A}^m$ die Flughöhe von m Renaissance-Raketen. Laut Aufgabenstellung ist $(X,Y) \sim (N^n_{(\mu_B,\sigma^2)} \otimes N^m_{(\mu_R,\sigma^2)})$. Sei außerdem $\mathscr{H}_0\colon \mu_B \geq \mu_R$. Nach Satz 26.43 hält dann der linksseitige Test

$$\varphi_c^l = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n - \overline{Y}_m \leq -c \frac{\sqrt{n+m}}{\sqrt{nm}} \hat{S}_{n,m}\}} = \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\overline{X}_n - \overline{X}_m}{\hat{S}_{n,m}} \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \geq c\right\}}$$

mit $c = t_{(n+m-2),(1-\alpha)}$ das Niveau α ein. Einsetzen aller Werte ergibt

$$-\frac{\overline{X}_n - \overline{X}_m}{\hat{S}_{n,m}} \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \approx 0.941 < 1.734 = t_{18,0.95}.$$

Also kann $\mathscr{H}_0$ nicht zum Signifikanzniveau 0.05 abgelehnt werden.

Aufgabe 37. (a) Für alle $\delta > 0$ gilt per Definition

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - y| > \delta) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - z| > \delta) = 0$$

Da h eine stetige Funktion ist und y und z bereits feststehen gilt

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(Y_n, Z_n) - (y,z)\|_1 \leq \delta &\implies |h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| \leq \epsilon \\
|Y_n - y| + |Z_n - z| \leq \delta &\implies |h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| \leq \epsilon \\
\{|h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| \leq \epsilon\} &\supset \{|Y_n - y| + |Z_n - z| \leq \delta\} \\
\{|h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| > \epsilon\} &\subset \{|Y_n - y| + |Z_n - z| > \delta\} \\
\mathbb{P}(|h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| > \epsilon) &\leq P(|Y_n - y| + |Z_n - z| > \delta) \\
\mathbb{P}(|h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| > \epsilon) &\leq P(|Y_n - y| > \delta) + \mathbb{P}(|Z_n - z| > \delta)
\end{aligned}$$

$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$,$Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|h(Y_n,Z_n) - h(y,z)| > \epsilon) = 0.$$

(b) Auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann als eine Folge von (konstanten) Zufallsvariablen aufgefasst werden. Weil $h(a,X) = aX$ eine stetige Funktion ist, gilt $a_nX_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX$. Weil $h(X,Y) = X + Y$ eine stetige Funktion ist, gilt $a_nX_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + Y$.

Aufgabe 38. Sei $X, X_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}\text{ f.s.}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ nach VL. Sei also $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Sei weiter $\mathcal{X} := \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}(\omega) > 0\}$. Dann ist $\mathbb{P}(\Omega \setminus \mathcal{X}) = 0$. Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$ für $\omega \in \mathcal{X}$. Sei dazu $\epsilon > 0$ und $\omega \in \mathcal{X}$. Da $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq n_0$:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \mathbb{P}(\omega).$$

Damit folgt $w \notin \{|X_n - X| > \epsilon\}$, also $|X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$.

Aufgabe 39. Zunächst berechne für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}^U([n,\infty)) = 1 - \mathbb{P}^U((-\infty,n)) = 1 - \int_0^n \exp(-v)\,\mathrm{d}v = \exp(-n)$$
$$\mathbb{P}^V([n,\infty)) = 1 - \mathbb{P}^V((-\infty,n)) = 1 - \int_1^n \frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{n}.$$

(a) Sei $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \epsilon$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(n\mathbb{1}_{[n,\infty)}(U) > \epsilon) \overset{n\geq\epsilon}{=} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{[n,\infty)}(U) > 0) = \mathbb{P}^U([n,\infty)) = \exp(-n).$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0$ also $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Sei nun $\sqrt{n} > \epsilon$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n}\mathbb{1}_{[n,\infty)}(V) > \epsilon) \overset{\sqrt{n}>\epsilon}{=} \mathbb{P}^V([n,\infty)) = \frac{1}{n}.$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = 0$ also $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(b) Betrachte

$$\mathbb{E}(|X_n|^2) = \mathbb{E}(n^2\mathbb{1}_{[n,\infty)}(U)) = n^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n,\infty)}(v) f^U(v)\,\mathrm{d}v = n^2\mathbb{P}^U((n,\infty)) = n^2 \exp(-n).$$

Betrachte $f(x) := x^2 \exp(-x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist durch mehrfache Anwendung von de l'Hospital $(*)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{\exp(-x)}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\exp(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0.$$

Mit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := n$ folgt also $\lim_{n\to\infty} n^2\exp(-n) = f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Also folgt insgesamt $\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_{L^2} = 0$ und damit $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_2} 0$.
Weiter folgt

$$\mathbb{E}(|Y_n|^2) = \mathbb{E}(n\mathbb{1}_{[n,\infty)}(V)) = n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n,\infty)}(v) f^V(v)\,\mathrm{d}v = n\mathbb{P}^V((n,\infty)) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Damit folgt $\lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_{L^2} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$. Da $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ konvergiert Y_n nicht in $\mathscr{L}_2$ gegen ein $Y \in \overline{\mathscr{A}}$ mit $Y \neq 0$ $\mathbb{P}$ f.s., da sonst auch $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \neq 0$ und stochastische Grenzwerte $\mathbb{P}$ f.s. übereinstimmen. Also konvergiert Y_n nicht in $\mathscr{L}_2$.

Aufgabe 40. (a) Es gilt für $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > \epsilon) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) > \epsilon)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U))\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Also gilt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ Gleichzeitig erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n|^2) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (X_n)^2 \mathbb{P}(\,\mathrm{d}x\,)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)\mathbb{P}(\,\mathrm{d}x\,)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\\ &= 1\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt $X_n \overset{L^2}{\not\longrightarrow} 0$.

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}(|X - X_n|^2) = \mathbb{E}(|X - X_n|^2\mathbb{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) + \mathbb{E}(|X - X_n|^2\mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \epsilon})$$

Wir nutzen die Hölder-Ungleichung $\mathbb{E}(|X_nX|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|X|^2)\mathbb{E}(|X_n|^2)}$ und erhalten

$$= \mathbb{E}(|X|^2\mathbb{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) + \mathbb{E}(|X_n|^2\mathbb{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) - 2\mathbb{E}(|XX_n|\mathbb{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) + \mathbb{E}(|X - X_n|^2\mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \epsilon})$$

Wegen $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ist $\{|X_n - X| > \epsilon\}$ eine Nullmenge und es gilt

$$\begin{aligned}
&= 0 + \mathbb{E}(|X - X_n|^2 \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \epsilon}) \\
&= \epsilon^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \epsilon}) \\
&= \epsilon^2 (1 - \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)) \\
&= \epsilon^2
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ erhalten wir daraus die Behauptung.

(c) Betrachte

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^{2+\alpha}) &= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{n}^{2+\alpha} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(U) \mathbb{P}^U(\,\mathrm{d}x\,) \\
&= \limsup_{n\to\infty} n \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$