Aufgabe	A13	A14	A15	A16	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 13. (a) Beh.: $\mathbb{P}^X$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{X}, \mathscr{B})$.

Beweis. (i) Es ist $\mathbb{P}^X \geq 0$, da $\mathbb{P} \geq 0$.

(ii) $\mathbb{P}^X(\mathcal{X}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathcal{X})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, da $\mathbb{P}$ W-Maß.

(iii) Zunächst ist für $A, B \subseteq \mathcal{X}$ mit $A \cap B = \emptyset$ auch $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Also bleiben disjunkte Vereinigungen unter Urbildbildung disjunkt $(*)$.
Seien nun $B_i \in \mathscr{B}$ für $i \in \mathbb{N}$ und paarweise verschieden. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X\left(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} B_i\right)\right) \\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} \underbrace{X^{-1}(B_i)}_{\in\mathscr{A}}\Big) \\
&\overset{\mathbb{P}\text{ Maß}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X^{-1}(B_i)) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^X(B_i).
\end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $\left(\mathbb{P}^X\right)^Y = \mathbb{P}(Y \circ X)$.

Beweis. Sei $C \in \mathscr{C}$.

$$\begin{aligned}
Y^{-1}(X^{-1}(C)) &= \{x \in \Omega \mid X(x) \in \{y \in \mathcal{X} \mid Y(y) \in C\}\} \\
&= \{x \in \Omega \mid Y(X(x)) \in C\} \\
&= (Y \circ X)^{-1}(C).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$(\mathbb{P}^X)^Y(C) = \mathbb{P}^X(Y^{-1}(C)) = \mathbb{P}(X^{-1}(Y^{-1}(C))) = \mathbb{P}((Y \circ X)^{-1}(C)) = \mathbb{P}^{(Y\circ X)}.$$

□

(c) Beh.: Es ist

$$\mathbb{P}^X(\{0\}) = \frac{4}{7} \qquad \mathbb{P}^X(\{1\}) = \frac{2}{7} \qquad \mathbb{P}^X(\{2\}) = \frac{1}{7}.$$

Damit ist $\mathbb{P}^X$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Es ist $\text{Bild}(X) = \{0, 1, 2\}$. Damit ist $(\text{Bild}(X), 2^{\text{Bild}(X)}, \mathbb{P}^X)$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Es genügt also $\mathbb{P}^X$ für alle Elementarereignisse zu bestimmen.
Damit folgt mit geometrischer Reihe

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X(\{0\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\})) = \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-3k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{7}{8}} = \frac{4}{7} \\
\mathbb{P}^X(\{1\}) &= \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0 + 1) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-3k-1-1} = \frac{2}{7} \\
\mathbb{P}^X(\{2\}) &= \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0 + 2) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-3k-2-1} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 14. (a) Wir benutzen den Dichtetransformationssatz. Es gilt $Y = h(X)$ mit $h(x) = -2\log(x)$, also $h'(x) = -\frac{2}{x}$ und $h^{-1}(y) = e^{-\frac{1}{2}y}$. Wir benötigen noch die Identität

$$\mathbb{f}^X(e^{-\frac{1}{2}y}) = \begin{cases} 1 & 0 \le e^{-\frac{1}{2}y} \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

Daher erhalten wir

$$\mathbb{f}^Y(y) = \frac{\mathbb{f}^X(e^{-\frac{1}{2}y})}{\left|-\frac{2}{e^{-\frac{1}{2}y}}\right|} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} = \mathbb{f}_{\mathrm{Exp}_{\frac{1}{2}}}(y)$$

(b) Erneut können wir den Dichtetransformationssatz anwenden, da $Y = h(X)$ mit $h(x) = \alpha x$, also $h'(x) = \alpha$ und $h^{-1}(y) = \frac{1}{\alpha}y$. Daher erhalten wir

$$\mathbb{f}^Y(y) = \frac{\mathbb{f}^X(\alpha^{-1}y)}{|h'(\alpha^{-1}y)|} = \frac{\mathbb{f}^X(\alpha^{-1}y)}{|\alpha|} = \mathbb{1}_{[0,\infty]}(y) \cdot \frac{\lambda}{\alpha} \cdot e^{-\lambda\frac{y}{\alpha}} = \mathbb{f}_{\mathrm{Exp}_{\frac{\lambda}{\alpha}}}(y)$$

(c) Da x^2 nicht bijektiv ist, können wir den Dichtetransformationssatz nicht anwenden. Es gilt aber

$$\int_0^y \mathbb{f}^Y(y')\,\mathrm{d}y' = \mathbb{F}^Y(y) = \mathbb{P}^Y([0,y]) = \mathbb{P}(Y^{-1}([0,y])) = \mathbb{P}([-\sqrt{y},\sqrt{y}]) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathbb{f}^X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}.$$

Nach dem Haupsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt daher

$$\mathbb{f}^Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y \mathbb{f}^Y(y')\,\mathrm{d}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Aufgabe 15. (a) Beh.: $\forall y \in [0,1], z \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{F}^*(y) \le z \iff y \le \mathbb{F}(z)$.

Beweis. Sei $y \in [0,1]$ und $z \in \mathbb{R}$.

- „$\Longrightarrow$". Sei also $\mathbb{F}^*(y) \le z$. Da $\mathbb{F}$ monoton wachsend, folgt direkt $\mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) \le \mathbb{F}(z)$.
  Also genügt es z.z.: $y \le \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$. Betrachte dazu $x_n := \mathbb{F}^*(y) + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition von $\mathbb{F}^*(y)$ folgt $\mathbb{F}(x_n) \ge y\ \forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $x_n \downarrow \mathbb{F}^*(y)$ für $n \to \infty$. Mit der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ folgt damit $\mathbb{F}(x_n) \downarrow \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$.
  Das heißt für $\epsilon > 0$ ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \ge n_0$ gilt, dass $|\mathbb{F}(x_n) - \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))| < \epsilon$. Da $\mathbb{F}$ monoton wachsend und $x_n \ge \mathbb{F}^*(y)$ folgt
  $$\mathbb{F}(x_n) = \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) + \epsilon$$
  Also da $y \le \mathbb{F}(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$
  $$y \le \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) + \epsilon.$$
  Mit $\epsilon \to \infty$ folgt $y \le \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$ und damit die Behauptung.
- „$\Longleftarrow$": Sei also $y \le \mathbb{F}(z)$. Dann folgt direkt
  $$\mathbb{F}^*(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{F}(x) \ge y\} \le z.$$

□

(b) Beh.: Ist $Y \sim U[0,1]$ dann hat $\mathbb{F}^*(Y)$ dieselbe Verteilung wie X.

Beweis. Sei $Y \sim U[0,1]$. Dann ist $Y(\omega) \in [0,1]\ \forall \omega \in \Omega$ und es folgt für $z \in \mathbb{R}$ aus (a), dass $\mathbb{F}^*(Y(\omega)) \le z \iff Y(\omega) \le \mathbb{F}(z)\ \forall \omega \in \Omega$ und damit

$$\mathbb{F}^*(Y) \le z \iff Y \le \mathbb{F}(z) \quad (*).$$

Außerdem gilt für $y \in [0,1]$ da $Y \sim U[0,1]$

$$\mathbb{P}(Y \le y) = y \qquad (**).$$

Damit folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{F}^*(Y) \le x) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(Y \le \mathbb{F}(x)) \overset{(**)}{=} \mathbb{F}(x).$$

Also sind $\mathbb{F}^*(Y)$ und $\mathbb{F}$ identisch verteilt. □

(c) Sei $\lambda > 0$. Beh.:

$$G(x) \coloneqq \begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x) & x \in [0,1) \\ \infty & x = 1 \end{cases}.$$

Beweis. Es ist $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$. Also definiere

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\colon (0,\infty) &\to [0,1) \\ x &\mapsto \mathbb{F}^X(x) = \mathbb{F}_{\mathrm{Exp}_\lambda}(x) = 1 - \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{F}$ invertierbar und es gilt $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^{-1}$ auf $(0,1)$. Weiter ist

$$\mathbb{F}^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x) \qquad x \in [0,1).$$

Wähle dann G wie in Beh. Dann ist $G = \mathbb{F}^*$ auf $(0,1)$ und $G(0) = 0 = \inf\{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \mathbb{F}(x) \geq 0\} = \mathbb{F}^*(0)$. Außerdem gilt $\mathbb{F}^*(1) = \inf\{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \mathbb{F}(x) = 1\} = \infty = G(1)$. Damit folgt die Behauptung aus (b). □

Aufgabe 16. (a) Aufgrund der Normierungsbedingung muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int_Y \int_X \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_Y \int_X C_\lambda e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_Y \int_0^y C_\lambda e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{0\leq y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_Y C_\lambda \left[x \cdot e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{0\leq y}\right]_{x=0}^y \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty C_\lambda y e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[-C_\lambda \frac{y}{\lambda}e^{-\lambda y}\right]_{y=0}^\infty - \int_0^i nfty - C_\lambda \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \\ &= 0 - 0 + \left[-C_\lambda \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda y}\right]_{y=0}^\infty \\ &= 0 - (-C_\lambda \frac{1}{\lambda^2}e^0) \\ &= \frac{C_\lambda}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Also gilt $C_\lambda = \lambda^2$.

(b) Es gilt

$$\mathbb{f}^X(x) = \int_\mathbb{R} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}\,\mathrm{d}y = \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \left[-\lambda e^{-\lambda y}\right]_x^\infty = \lambda e^{-\lambda x}$$

und

$$\mathbb{f}^Y(y) = \int_\mathbb{R} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}\,\mathrm{d}x = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x = \left[\lambda^2 e^{-\lambda y}x\right]_0^y = \lambda^2 y e^{-\lambda x}$$

(c) Es gilt

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_y^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y}\underbrace{\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}}_{=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

und

$$\mathbb{P}(2X \leq Y) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{y}{2}} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^{\frac{y}{2}} \lambda^2 e^{-\lambda y}\underbrace{\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}}_{=1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \left[\lambda^2 e^{-\lambda y}x\right]_{x=0}^{\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty y\lambda^2 e^{-\lambda y} = \frac{1}{2}$$